◆ 記号および数値

d：伝熱管内径（0.02135m），　ℓ：伝熱管加熱部長さ（1.2m）
d_0：オリフィス穴径（0.01956m），　D：オリフィス前後の管内径（0.03093m）
c：流量係数，　β：オリフィス開口比＝$(d_0/D)^2$＝0.40
ε：空気の膨張による修正係数，　ρ：空気の密度［m2/ｓ］
μ：空気の粘性係数［Pa・ｓ］，　$\nu=\mu/\rho$：空気の動粘性係数［m2/ｓ］
P_1, P_2：オリフィス直前および直後の絶対圧力［Pa］，
P_a：大気圧［Pa］，　$\varDelta P = P_1 - P_2$；オリフィス差圧［Pa］
$T_i = T_{in}$：伝熱管入口での空気の混合平均温度［K］，
$T_e = T_{out}$：伝熱管出口での空気の混合平均温度［K］，
T_w：伝熱管内壁温度［K］，　$\varDelta T_i = T_w - T_i$，　$\varDelta T_e = T_w - T_e$
T_b：平均流体温度＝$(T_i + T_e)/2$，　T_f：膜温度＝$(T_w + T_b)/2$
$\varDelta\theta$：壁と流体の対数平均温度差［K］，
λ：空気の熱伝導率［W/(m・K)］，　C_p：空気の定圧比熱［J/(kg・K)］
α：平均熱伝達率［W/(m2・K)］，　Q：伝熱量［W］
m：質量流量［kg/ｓ］，　U_m：伝熱管内の空気の平均速度［m/ｓ］
U_1：オリフィス前方での空気の平均速度［m/ｓ］，

添字

1：オリフィス直前における値，　f：温度T_{f}における値（膜温度における物性値）

物性値

水の密度；$\rho_{water} = 998.204$ [kg/m³]（20℃）
空気の気体定数；$R_{Air} = 287.04$ [J/(kgK)]

1 [mmHg] = 1.333224×10² [Pa]
大気圧；$P_a = 769.24$ [mmHg] ＝ 0.10256 [MPa]　（14:00，12.9）

表１　空気の物性値

温度 °C	C_p J/(kg·K)	μ Pa·s	λ W/(m·K)	Pr
0	1006	1.724×10^{-5}	0.0241	0.720
20	1007	1.822	0.0257	0.714
40	1008	1.916	0.0272	0.710
60	1009	2.008	0.0287	0.706
80	1010	2.097	0.0302	0.701
100	1012	2.183	0.0316	0.699

１．　緒言

熱機関や電化製品など，機械の多くは熱的な問題を抱えることが多い．例えば燃焼機関では，材料金属の温度を制御するために空気や水で熱交換を行なっている．その際，空冷方式であれば伝熱面面積や空気抵抗を考慮したフィンの設計が必要となり，水冷方式であれば冷却水の流量や冷却水圧力，およびラジエータの取り付け位置や角度など流体力学的な考慮が必要となり，その時にどちらも共通して最重要となるパラメータが熱伝達率である．

今回の実験では，円管内の流れが乱流の場合に，円管が壁温一定の条件の下に加熱されたとき，管内を流れる空気への熱伝達率を求める．その結果からヌセルト数とレイノルズ数の関係を導き，強制対流熱伝達の基礎法則について考察する．

２．　実験装置

図１に示すような開いた系の実験装置を用いて円管内乱流熱伝達率を測定する．伝熱管は大気圧上記で壁温一定（Tw=100[℃]＝const）に加熱されている．

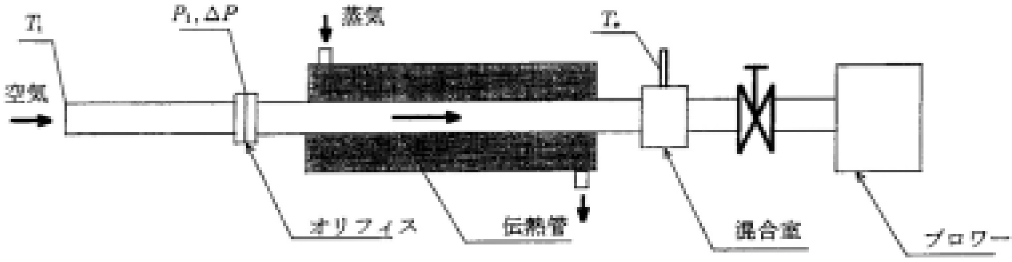

図１　実験装置

３．　基礎事項

３．１　熱伝導

熱伝導によって物体内を移動する熱量は，“熱伝導に関するフーリエの法則”を用いて表すことができる．この法則は熱流に直角な単位面積をとおして，単位時間当たりに流れる熱流速 q [W/m²]は熱流の方向の温度傾斜 $\partial T/\partial r$ [K/m]に比例するというもので，次式で表される．

$$q = -\lambda \frac{\partial T}{\partial r} \quad [\mathrm{W/m^2}] \qquad ―――（１）$$

ただし， r [m]は熱流方向に沿って測った距離であり，熱力学第二法則・熱の流れ一方向性（熱が高熱源から低熱源へ移動）より図２のように熱流方向に温度傾斜が負になるため，式の右辺に負の記号を付けて q が正になるようにしてある．

また，比例定数 λ [W/(m・K)]は熱伝導率と呼ばれ，単位温度傾斜あたりの熱流速の大きさを意味している．したがって，熱の良導体の λ は大きい値を示す．厳密には λ は温度の影響を受けるが，実用上は，温度範囲を限って一定値扱いすることが多い．

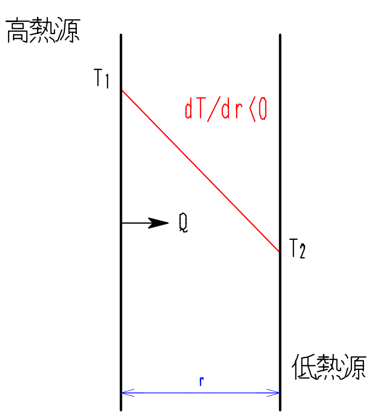

図２　フーリエの法則概略図

３．２ 熱伝達

強制対流熱伝達では，単位時間に固体壁面より流体へ移動する熱量 Q[W]は，壁の表面積 S[m²]および壁の温度 Tw[K]と流体の温度 T[K]との温度差に比例するニュートンの冷却法則の次式が成り立つ．

$$Q = \alpha(T_w - T)S = \alpha S \varDelta\theta \qquad ———（2）$$

ここで，熱伝達により移動する熱量 Q を表すのに必要な比例定数α[W/m²K]が熱伝達率である．

したがって，対流を含む場合の熱量 Q[W]は，

$$Q_0 = \alpha_0(\theta_0 - T_0)S$$

$$Q_1 = -\lambda(T - T_0)S/dr$$

$$Q_2 = \alpha_1(T - \theta_1)S$$

定常のとき

$$Q_0 = Q_1 = Q_2$$

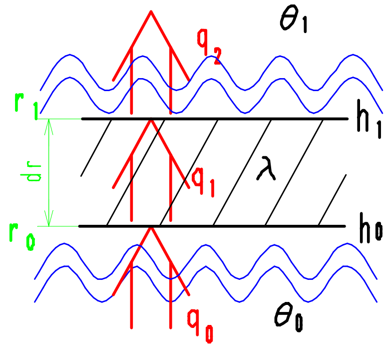

図３　対流熱伝達

よって，対流のある場合の熱量 Q は，

$$Q = \frac{\theta_0 - \theta_1}{1/\alpha_0 + dr/\lambda + 1/\alpha_1} \qquad ———（3）$$

３．３ ニュートンの冷却法則の式変換

ここで，まず熱力学第一法則に基づき，開いた系における流動のエネルギ式を考える．

熱力学第一基礎式より，

$$dQ = dU + pdV \qquad ———（4）$$

また，エンタルピの定義式より，

$$H = U + pV$$

$$\Leftrightarrow \quad dH = dU + V\cdot dp + p\cdot dV$$

$$\Leftrightarrow \quad pdV = dH - dU - V\cdot dp \qquad ———（5）$$

式(5)を式(4)に代入して，

$$(4) \Leftrightarrow \quad dQ = dH - Vdp \qquad ———（6）$$

式(6)において，$-Vdp$ は工業仕事である．

いま，系が仕事をしないとすると，$-Vdp = 0$ なので上式は，

$$(6) \Leftrightarrow \quad dQ = dH = m\cdot dh \qquad ———（7）$$

である．ただし，m は質量流量，ｈは比エンタルピを表す．

また，作動流体を理想気体（狭義の理想気体；比熱一定）とすると，$dh = C_p dT$ より，

$$dQ = m\cdot dh = mC_p\cdot dT$$

$$\Leftrightarrow \quad Q = mC_p(T_{out} - T_{in}) \qquad ———（8）$$

したがって，式(8)を用いてニュートンの冷却法則を表現すると，

$$\alpha S\varDelta\theta = mC_p(T_{out} - T_{in})$$

$$\Leftrightarrow \quad \alpha = \frac{mC_p(T_{out} - T_{in})}{S\varDelta\theta} \qquad ———（9）$$

であるため，質量流量m[kg/s]，定圧比熱 C_p[J/(kg・K)]，系への入口・出口温度 T_{out},T_{in}[K]，系の壁面表面積 S[m²]，および壁の温度 T_W[K]と流体の温度差⊿θ[K]が分かれば熱伝達率を測定することができる.

ここで，ここで式(9)における，定圧比熱 C_p は膜温度における空気の物性値，温度 T_e,T_i は測定値，面積 S は装置における固有値，壁の温度 T_W＝373.15[K]である.

また，質量流量mはオリフィスおよびマノメータを用いた測定結果より求め，流体の温度差⊿θは対数平均温度差により求める.

３．４ 質量流量m，流体の温度差⊿θの算出方法

３．４．１ 質量流量mの計算

質量流量mを求めるにあたっては，オリフィスおよびマノメータを利用する.

≪マノメータの原理≫

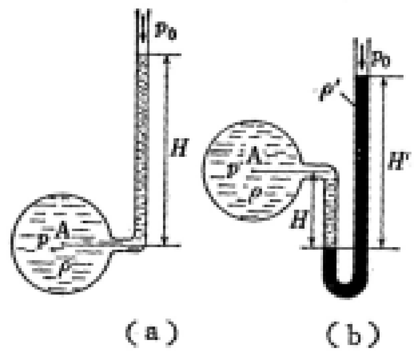

図４ 通常マノメータ[4)]

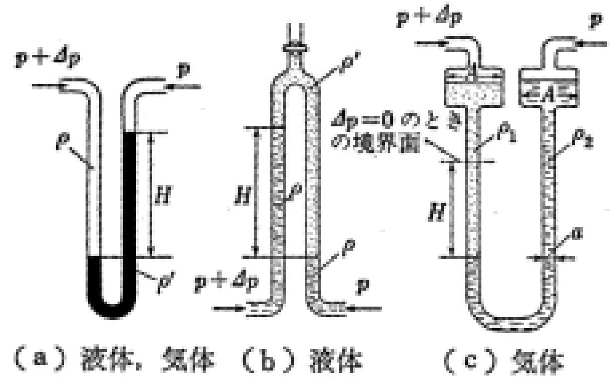

図５ 示差マノメータ[4)]

液体の圧力を，密度の分かっている液体の液柱の重量とつりあわせ，その液柱の長さを測定して圧力を求める圧力計をマノメータという．液体は，圧力が比較的高い時には水銀，低い時には水やアルコールが使用される.

（１） 通常マノメータ

図４に通常マノメータの原理図を示す．(a)は，容器の中の圧力を，容器内の液体と同じ液体の液柱によって測定するものである．点 A の圧力ｐは，

$$p = p_0 + \rho g H$$

ここに，p_0 は外気圧力，ρは液体の密度，ｇは重力加速度，H は測定する点 A から測った液面の高さである.

(b)は，点 A の圧力が大きく(a)の方法では液柱が高くなりすぎる時，液注を密度の大きい液体(例えば，水に対して水銀など)によって置き換えて圧力を測定する場合を示している．H と H'を測定すれば，点 A の圧力が次式で求まる.

$$p = p_0 + \rho' g H' - \rho g H$$

ただし，ρ'は置き換えた液体の密度である.

（２） 示差マノメータ

示差マノメータは，二つの圧力の差を測定するもので，図５にその測定原理を示している．図の(a)は，液体または気体の圧力差⊿ｐを，それより密度の大きい液柱によって測定する場合を示している．液柱 H を測定すれば，

$$\varDelta p = (\rho' - \rho) g H$$

から，圧力差⊿ｐが求まる．(a)のようなマノメータをその形から U 字管マノメータという.

１本のＵ字管マノメータでは液柱Ｈが大きすぎて測定できない場合，２本以上のＵ字管マノメータを直列に連結し，液柱の全長 H を分割して測定すればよい．そのようなマノメータを多管マノメータと呼ぶ.

(b)は，原液より軽い液体（ρ'＜ρ）を使用する場合で，圧力差⊿ｐは,

$$\varDelta p = (\rho - \rho')gH$$

で求められる.

気体の液柱差を測定する場合には，(a)と同様にして，ρを気体，ρ'を水などの液体として使用することで測定できる．圧力差が小さい場合，(c)のように密度の近い２種類の液体 ρ_1, ρ_2 を用いると，液柱を拡大して測定することができる．二つの小タンクの断面積が等しいとしてこれを A とすううと，圧力差がないときの両液の境界面に対し，圧力差⊿ｐを加えたときに境界面が H だけ下降したとすれば，圧力差⊿ｐは次式によって表される.

$$\varDelta p = \left[(\rho_2 - \rho_1) + (\rho_1 + \rho_2)\frac{a}{A}\right]gH$$

面積比 a/A が十分小さければ，上式は次のようになる.

$$\varDelta p = (\rho_2 - \rho_1)gH$$

≪オリフィスの原理≫

JIS Z 8762 に規定されているオリフィス板（管オリフィスともいう）の形状と寸法比は図６に示すとおりである．差圧の取り出し方法として，コーナタップ，縮流タップおよびフランジタップのいずれかを用いる．図６はコーナタップの場合を示しており，単孔によるものと環状室によるものとの２種類がある．縮流タップでは，上流側圧力取出口の位置はオリフィス板の上流面から１D，下流側圧力取出口は絞り直径比βの大きさに応じて規格の指示する位置とする．フランジタップでは，上流側および下流側圧力取出口をオリフィス板上流面から上流と下流へそれぞれ 25.4mm の位置に設ける.

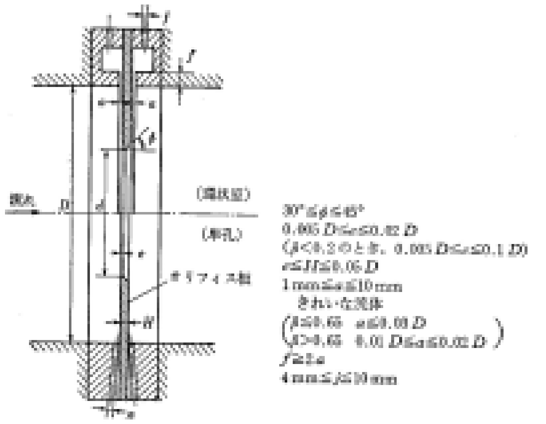

図６　オリフィス板（コーナタップ）4)

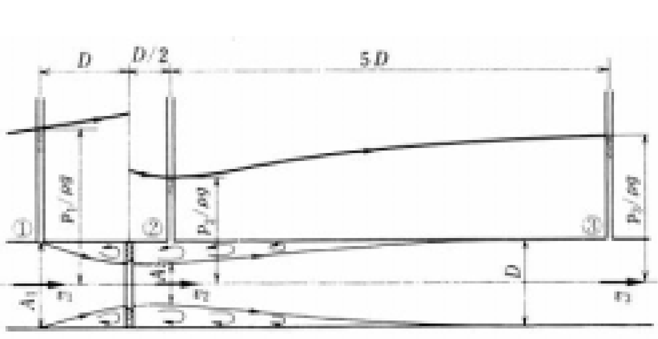

図７　管内オリフィス4)

オリフィスは図７に示したように, 流路を狭める前後の流体の圧力差を求めることにより, 管内流れの体積流量や質量流量を求める流体装置である.

水平に置かれた円管にオリフィスを設置した場合, そのオリフィス上流・下流の圧力分布は図７のようになる. オリフィスの影響を受け始める上流断面と下流の縮流部の速度と圧力をそれぞれ U_1,P_1 および U_2,P_2 とし, 損失が無いものとしてこの２断面にベルヌーイの定理を適用すれば次式が得られる.

$$\frac{1}{2}U_1{}^2+\frac{P_1}{\rho_1}=\frac{1}{2}U_2{}^2+\frac{P_2}{\rho_2} \qquad ―――（10）$$

また，連続の式より，

$$\rho_1 U_1 A_1=\rho_2 U_2 A_2 \qquad ―――（11）$$

したがって，式(10)と式(11)より U_1 を消去して，

$$\frac{1}{2}\left(\frac{\rho_2}{\rho_1}\cdot\frac{A_2}{A_1}\cdot U_2\right)^2+\frac{P_1}{\rho_1}=\frac{1}{2}U_2{}^2+\frac{P_2}{\rho_2}$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{1}{2}\left\{1-\left(\frac{\rho_2}{\rho_1}\cdot\frac{A_2}{A_1}\cdot U_2\right)^2\right\}U_2{}^2=\frac{P_1}{\rho_1}-\frac{P_2}{\rho_2}$$

$$\Leftrightarrow \quad U_2=\left\{1-\left(\frac{\rho_2 A_2}{\rho_1 A_1}\right)^2\right\}^{-\frac{1}{2}}\left\{2\left(\frac{P_1}{\rho_1}-\frac{P_2}{\rho_2}\right)\right\}^{\frac{1}{2}} \qquad ―――（12）$$

ここで，流体を非圧縮性流体と仮定すると， ρ＝const より式(12)は,

$$(12)\Leftrightarrow \quad U_2=\frac{1}{\sqrt{1-(A_2/A_1)^2}}\sqrt{2\frac{\varDelta P}{\rho_1}} \qquad ―――（12'）$$

また，管路と縮流部の断面積 A_2 はオリフィス孔の断面積 A と収縮係数 C_c を用いて，次式のように表せる.

$$A_2=C_c A$$

以上のことより質量流量mは,

$$m=C\cdot\rho A U_2=\frac{CA}{\sqrt{1-(C_c\,A/A_1)^2}}\sqrt{2\rho_1\varDelta P} \qquad ―――（13）$$

ただし，C はオリフィスの流路係数であり，収縮係数 C_c および速度係数 C_v の積で定義されており，これらの係数はレイノルズ数に依存する.（図８参照）

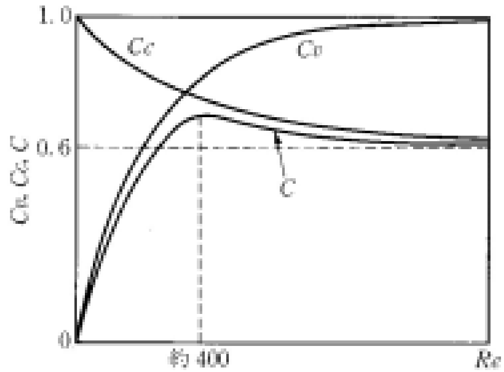

図８　流路係数とレイノルズ数

また，面積比は，

$$\frac{A}{A_1}=\frac{\pi}{4}{d_0}^2\Big/\frac{\pi}{4}D^2=\left(\frac{d_0}{D}\right)^2$$

であるので，式(13)は，

$$m=\frac{C}{\sqrt{1-\left(C_c\,{d_0}^2/D^2\right)^2}}\frac{\pi}{4}{d_0}^2\sqrt{2\rho_1\varDelta P} \qquad ———（13'）$$

となる．ただし，流路係数を個別の面積比において求めることは困難であり，

$$c=\frac{C}{\sqrt{1-\left(C_c\,{d_0}^2/D^2\right)^2}} \qquad ———（14）$$

とおいて，c を流量係数として扱う．

よって，質量流量は次式で表すことができる．

$$(13')\Leftrightarrow \quad m=c\frac{\pi}{4}{d_0}^2\sqrt{2\rho_1\varDelta P} \qquad ———（15）$$

ただし，式(15)は非圧縮性流体を仮定した場合の質量流量の式であり，圧縮性流体を扱う場合は圧縮補正係数 ε を乗じて，

$$m=c\varepsilon\frac{\pi}{4}{d_0}^2\sqrt{2\rho_1\varDelta P} \qquad ———（16）$$

となる．よってこの式より，オリフィスを用いた場合の質量流量の測定には，流量係数ｃ，圧縮補正係数ε，オリフィス内径d_0，流体のオリフィス前後の圧力差⊿P およびオリフィス上流の流体の密度ρ_1を測定または求めることができれば算出することが出来る．

空気の圧縮性に対する補正係数 ε は，JIS により次式で定義されている．

$$\varepsilon=1-0.2667\,\varDelta P/P_1 \qquad ———（17）$$

また，流量係数ｃは，式(14)からも分かるようにオリフィスの収縮係数および速度係数の関数であるのでレイノルズ数に依存する．その流量係数ｃとレイノルズ数の関係を図９に示す．

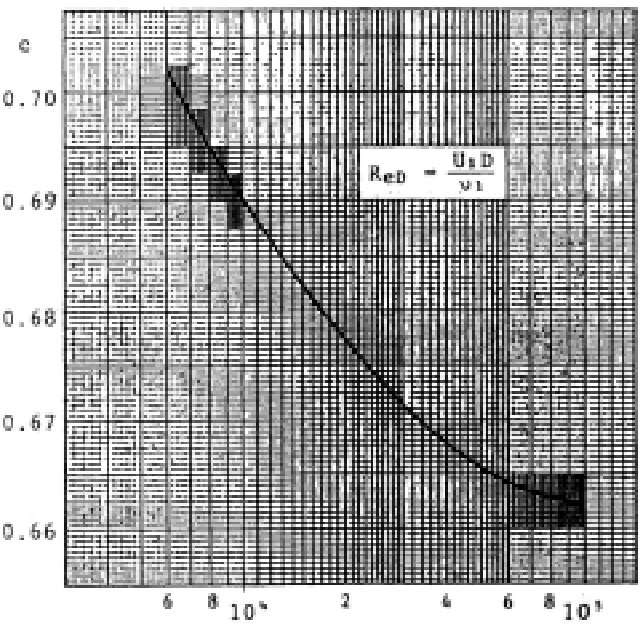

図９　オリフィスの流量係数とレイノルズ数

なお図９のレイノルズ数 $\mathrm{Re_D}$ は次式で定義されている．

$$\mathrm{Re}_D = \frac{U_1 D}{\upsilon_1} = \frac{4m}{\pi D \mu_1} \qquad \text{———（18）}$$

一方，オリフィス入口での空気密度 ρ_1 は，オリフィス直前圧力 P_1，同直前温度 T_1（T_i）において，理想気体の状態補遺定式により計算する．

（理想気体の）状態方程式；$\dfrac{P}{\rho} = RT$

$$\Leftrightarrow \quad \rho_1 = \frac{P_1}{R_{Air} T_i} \qquad \text{———（19）}$$

３．４．２　流体の温度差⊿θの計算

伝熱管に対する流入，流出端の条件が与えられた場合に伝熱量を求める際には，対数平均温度差が用いられる．したがって，⊿θ は次式で定義されている．

$$\varDelta\theta = \frac{\varDelta T_i - \varDelta T_e}{\ln\left(\varDelta T_i / \varDelta T_e\right)} = \frac{T_e - T_i}{\ln\left\{\left(T_w - T_i\right)/\left(T_w - T_e\right)\right\}} \qquad \text{———（20）}$$

３．５ プラントル数 Pr，ヌッセルト数 Nu，レイノルズ数 Re

伝熱工学において，境界層を支配する無次元数にプラントル数 Pr，ヌッセルト数 Nu，レイノルズ数 Re があり，これらは次式で定義されている．

プラントル数；$\mathrm{Pr} = \dfrac{\upsilon}{a} = \dfrac{\mu C_p}{\lambda}$　（a；熱拡散率＝ $\dfrac{\lambda}{\rho \cdot C_p}$ [m²/s]）　———（21）

ヌッセルト数；$Nu = \dfrac{\alpha d}{\lambda}$　———（22）

レイノルズ数；$\mathrm{Re} = \dfrac{U_m d}{\upsilon}$　———（23）

ただし，これらの値は壁温と主流の温度差により，境界層内の物性値は一定ではない．したがって，主流の壁温度の平均温度である膜温度にて物性値を評価する．

４．　実験方法

測定は T_i, T_e, P_a, P_1, ⊿P について行う．これらのデータから，熱伝達率 α を計算する．

温度測定は温度計を用い，圧力測定はマノメータを用いる．マノメータの作動流体は水である．

実験はバルブで流量を調整することにより，異なる６つの条件により測定を行う．実験条件は⊿P のマノメータ読みの目標値を 400,300,200,100,50,20 とする．

また，測定した伝熱管入口での空気の混合平均温度 T_i [℃]および、伝熱管出口での空気の混合平均温度 T_e [℃]は補正値表を用いて読取値から補正値を算出する．

５． 実験結果・考察

５．１ 測定結果

温度計によって測定した伝熱管入口での空気の混合平均温度T_i [℃]および、伝熱管出口での空気の混合平均温度T_e [℃], そしてオリフィス前後の圧力差⊿P を測定したマノメータ読み[mmAq]および基準圧力差 $P_a - P_1$ のマノメータ読み[mmAq]をそれぞれ表２に示す.

表2　測定結果表

No.	T_i [℃]	T_e [℃]	P_a-P_1 [mmAq]	⊿P (=P_1-P_2) [mmAq]
1	21.71	55.0	44	398
2	22.50	56.7	35	301
3	22.78	57.6	24	200
4	23.06	59.3	13	99
5	23.08	62.0	7	48
6	23.22	63.7	3	19

表２の値より，平均流体温度$T_b = (T_i + T_e)/2$ および膜温度$T_f = (T_w + T_b)/2$ を求めたものを表３に示す．流体の温度差⊿θは対数平均温度差の定義式(20)を用いる.

また，表２の値より，基準圧力差および⊿P は理論の章でも示したとおり，次の式で求めることができる.

$$p + \rho_{air} gh' = p_0 + \rho_{liq} gh$$

ここで，$\rho_{liq} \gg \rho_{air}$ を考慮すると次式となる.

$$p - p_0 = \rho_{liq} gh$$

作動流体は水であるので，$\rho_{liq} = 998.204$ [kg/m^3]を代入して得た圧力差を表３に示す.

表3　測定結果の整理

No.	T_i [K]	T_e [K]	T_b [K]	T_f [K]	⊿θ [K]	P_a-P_1 [kPa]	P_1 [kPa]	⊿P (=P_1-P_2) [kPa]
1	294.86	328.2	311.5	342.3	60.1	0.43	102.13	3.90
2	295.65	329.9	312.8	343.0	58.8	0.34	102.21	2.95
3	295.93	330.8	313.3	343.2	58.1	0.23	102.32	1.96
4	296.21	332.5	314.3	343.7	56.9	0.13	102.43	0.97
5	296.23	335.2	315.7	344.4	55.2	0.07	102.49	0.47
6	296.37	336.9	316.6	344.9	54.0	0.03	102.53	0.19

これらの値と式(15)～(17),(19)および図９より得たレイノルズ数 Re_D，流量係数 C，圧縮係数ε，質量流量m，入口密度ρ_1の値を表４に示す.

また同時に，プラントル数 Pr_f，ヌッセルト数 Nu_fを表５にて求める.

なお，これらの値の導出に必要な定圧比熱 Cp，粘度μ，熱伝導率λは表１（p.2）より直線補間により求める.

表４より，Re≫2300 であるので，今回の実験は間違いなく乱流である.

表4　質量流量mの導出

No.	ε	μ_1 [Pa・s]	c	Re_D	ρ_1 [kg/m^3]	m [kg/s]
1	0.990	1.830×10^{-5}	0.6670	43189	1.207	0.0192
2	0.992	1.834×10^{-5}	0.6685	37714	1.204	0.0168
3	0.995	1.835×10^{-5}	0.6710	30957	1.205	0.0138
4	1.0	1.836×10^{-5}	0.6760	21968	1.205	0.0098
5	1.0	1.836×10^{-5}	0.6815	15467	1.205	0.0069
6	1.0	1.837×10^{-5}	0.6900	9859	1.205	0.0044

表5　α, Pr_f, Nu_f, Re_fの導出

No.	Cp_f [J/(kg・K)]	α [W/(m^{2}K)]	μ_f [Pa・s]	λ_f [W/(m・K)]	Pr_f	Nu_f	Re_f
1	1009	133	2.049×10^{-5}	0.0294	0.704	96.8	55900
2	1010	123	2.052×10^{-5}	0.0294	0.704	89.0	48800
3	1010	104	2.053×10^{-5}	0.0295	0.703	75.2	40100
4	1010	78.3	2.055×10^{-5}	0.0295	0.703	56.7	28400
5	1010	61.1	2.058×10^{-5}	0.0295	0.703	44.1	20000
6	1010	41.4	2.060×10^{-5}	0.0296	0.703	29.9	12700

表３，表４，表５の結果より熱伝達率αについて考察する．

次ページ図 10 に熱伝達率と質量流量のグラフを，図 11 に熱伝達率と膜温度のグラフを示す．これを見る限り，熱伝達率は質量流量と膜温度に比例しているように見うけられる．

αは式(9)より，

$$(9) \Leftrightarrow \qquad \alpha = \frac{mC_p\left(T_{out} - T_{in}\right)}{S \varDelta \theta}$$

で与えられるので，$\alpha \propto m$ の関係はあるが，m－α線図が完全な一次関数となっている．$S = const$，実験条件の温度範囲では $Cp_f \approx const$ であるので，今回の実験条件では

$$\frac{T_e - T_i}{\varDelta \theta} \approx \frac{S}{Cp_f}\left(\frac{16.53}{m} + 6225\right) \qquad ―――(24)$$

の関係があった．

図 11 についても，式(24)および式(8)などより温度と流量には関係があり，$T_e - T_i \propto 1/m$ であるが，膜温度と熱伝達率の関係は $\alpha \propto m \propto 1/T_f$ であると私は推測したが，実際には反比例というよりも $\alpha \propto -T_f$ であるようである．ただし，図 11 は図 10 に比べると最小二乗法のグラフからはズレが大きい．

ちなみに，図 10，図 11 の最小二乗法の直線近似式と実験測定値の熱伝達率との相関係数は,

m－α線図；$r_{m-\alpha} = 0.9983$

T_f－α線図；$r_{T_f-\alpha} = 0.9896$

である．

これらのグラフより，熱伝達率を上げるためには，流量を上げることが有効であることが分かる．

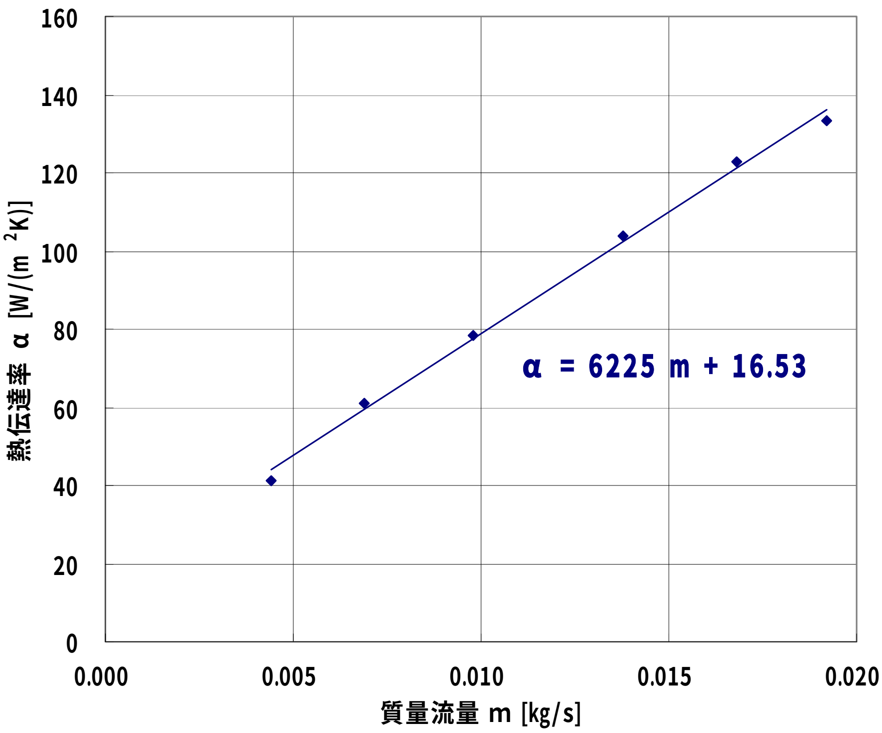

図10　熱伝達率と質量流量

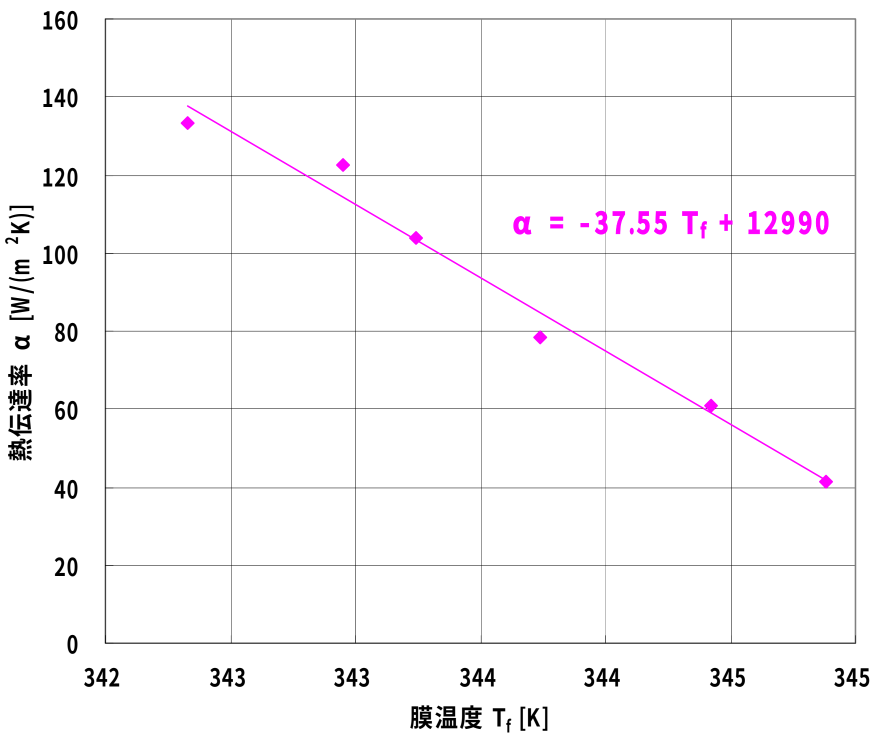

図11　熱伝達率と膜温度

５．２ Nu，Re，Pr の関係

強制対流熱伝達における実験式は各種発表されているが，一般に Nu，Re，Pr を主要無次元数として，

$$Nu = c\,\mathrm{Re}^m\,\mathrm{Pr}^n \qquad ―――(25)$$

の形で表されることが多い．

したがって，ここでは式(24)における係数ｃと指数m,ｎを実験結果から求める．

式(25)より，両辺に対数をとると，

$$\log(Nu) = \log(c\,\mathrm{Re}^m\,\mathrm{Pr}^n) = m\cdot\log(\mathrm{Re}) + n\cdot\log(\mathrm{Pr}) + \log(c) \qquad ――― (26)$$

ただし，今回の実験条件では表５を見ても分かるとおり， $\mathrm{Pr} \approx const$ である．

Pr の指数ｎは Colburn の実験式より 0.7＜Pr＜120 において，

$$n = \frac{1}{3} \qquad ―――(27)$$

であるので今回はこの値を用いる．

よって，Re の指数mは図 12 に示す両対数グラフにおいて，最小二乗法により求まる指数mは，

$$m = 0.7961 \qquad ――― (28)$$

式(27),(28)の値を式(25)に代入すると

$$(25) \Leftrightarrow \quad Nu_f = c\,\mathrm{Re}_f^{\;0.7961}\,\mathrm{Pr}^{0.3333} \qquad ――― (29)$$

この式より係数ｃは，図 13 に示すグラフの傾きを最小二乗法を用いて算出する．

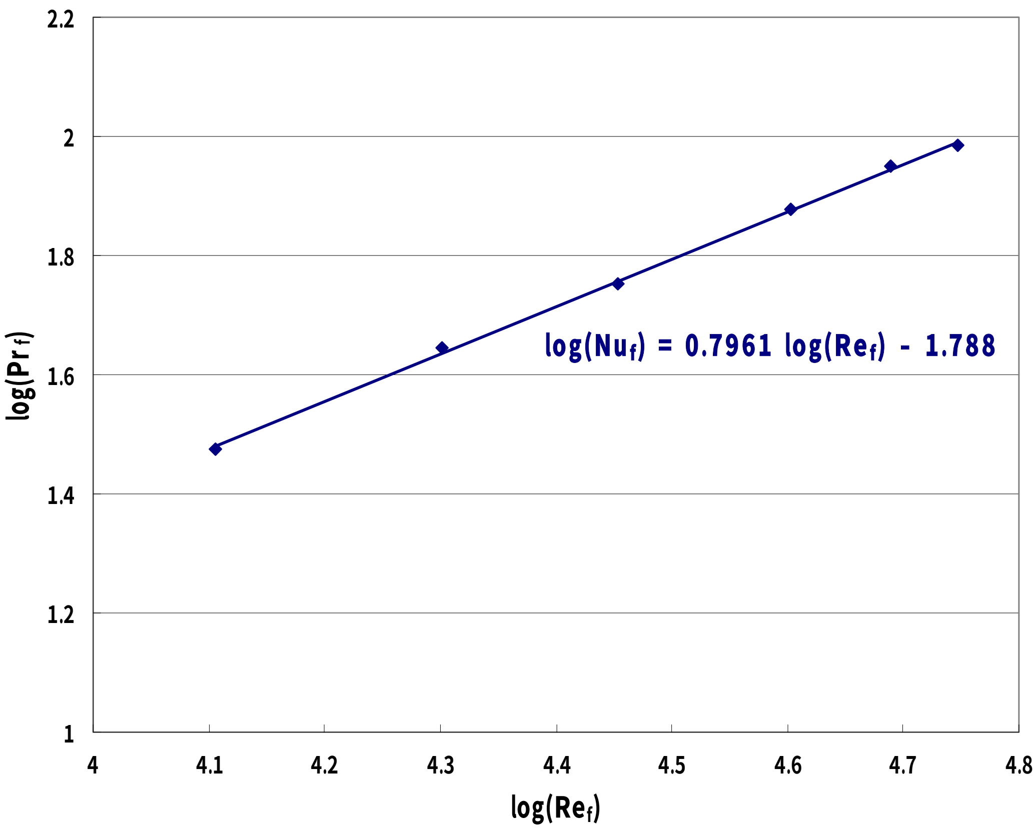

図12 log(Nuf)-log(Ref) グラフ

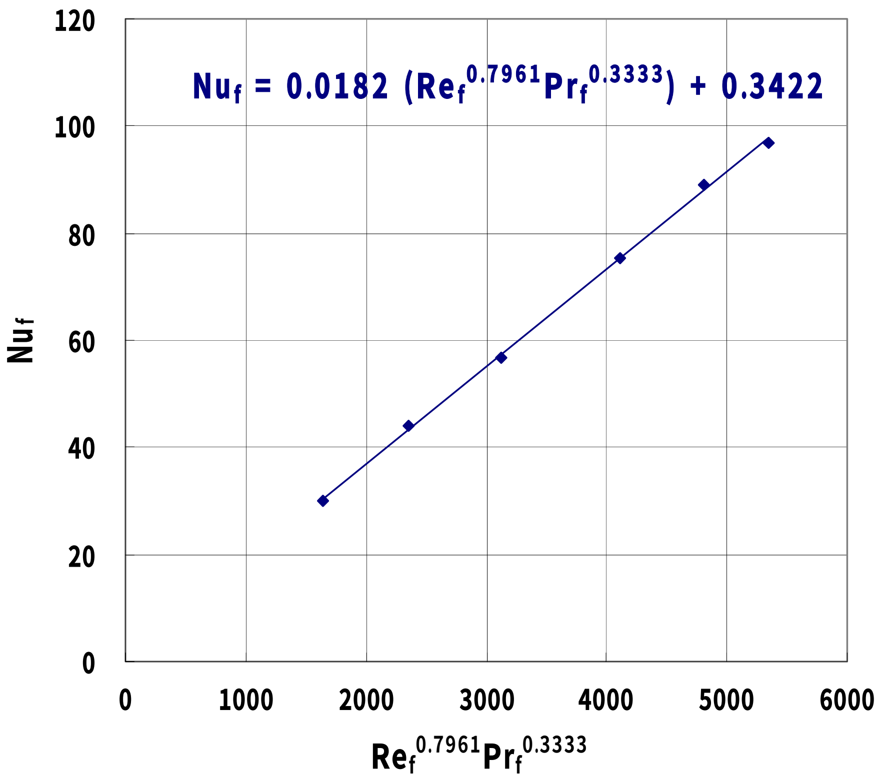

図13　Nu_f, Re_f , Pr_fの関係グラフ

したがって，図 13 に示す最小二乗法の近似直線より，

$$c = 0.0182 \qquad ――― (30)$$

であり，オフセット誤差は 0.342 であった．

以上より，今回の実験より得た強制対流熱伝達の実験式は，

$$Nu_f = 0.0182 \cdot \mathrm{Re}_f^{0.796}\,\mathrm{Pr}^{0.333} \qquad ――― (31)$$

５．３　実験結果と各種実験式との比較

円管内の乱流熱伝達の式は $Nu = f(\mathrm{Re}, \mathrm{Pr})$ の関係式で多くの実験式が与えられており，壁温を一定とするときには次のような式がある．

（１） **Dittus-Boelter の式**

$$Nu_m = 0.023\,\mathrm{Re}_d^{0.8}\,\mathrm{Pr}^{0.4} \qquad ――― (32)$$

（$10^4 < \mathrm{Re}_d < 1.2 \times 10^5$， $0.7 < \mathrm{Pr} < 120$，物性値は平均温度；T_b）

この式はレイノルズのアナロジ式を実験結果から修正した式である．

レイノルズのアナロジ；$Nu_m = 0.0395\,\mathrm{Re}_d^{3/4}\,\mathrm{Pr}^{1/3}$ [2]

当然のことながら，この式は壁温 T_w と流体の平均温度 T_b との差が大きくなると，物性値の温度依存性から誤差が大きくなる．

（２） Colburn の式

$$Nu_m = 0.023\,\mathrm{Re}_d^{\ 0.8}\,\mathrm{Pr}^{1/3} \qquad ―――（33）$$

（$10^4 < \mathrm{Re}_d < 10^5$， $0.5 < \mathrm{Pr} < 100$，物性値は膜温度 T_f で評価）

コルバーンのアナロジ； $Nu_m = \dfrac{1}{2} C_f \cdot \mathrm{Re} \cdot \mathrm{Pr}^{1/3}$ （C_f は摩擦係数）

また，Schlichting の実験結果より [1]，

$$C_f = 0.0592\,\mathrm{Re}^{-1/5}$$

したがって，コルバーンのアナロジ式は上式より，

$$Nu_m = 0.0296\,\mathrm{Re}^{0.8}\,\mathrm{Pr}^{1/3}$$

であり，この式を実験結果から修正したのが式(33)である．

（３） Prandtl-Taylor のアナロジによる式 [2]

$$Nu_m = \frac{0.0395\,\mathrm{Re}_d^{\ 0.75}\,\mathrm{Pr}}{1 + 1.99\,\mathrm{Re}_d^{\ -0.125}(\mathrm{Pr} - 1)} \qquad ―――（34）$$

（$0.5 < \mathrm{Pr}$，物性値は膜温度 T_f で評価）

プラントル・テイラーのアナロジはレイノルズのアナロジ式を Pr 数に関して拡張した式である．

プラントル・テイラーのアナロジ； $\dfrac{\alpha}{\tau_w} = \dfrac{C_p}{u_\infty} \cdot \dfrac{1}{1 + (u/u_\infty)(\mathrm{Pr} - 1)}$

流体力学より，管内の流体の力の釣り合いより，（機械工学実験；流体工学１を参照）

$$\tau_w = C_f \rho \cdot u_m^{\ 2} / 2, \qquad C_f = \frac{\lambda}{4}$$ （λ；Darcy-Weisbach の管摩擦係数）

また，円管内乱流における摩擦係数 C_f は，Blasius の実験式で，

$$\lambda = 0.3164\,\mathrm{Re}^{-0.25}$$

また，流体の運動量積分方程式を 1/7 乗則で解くと，

$$\frac{u}{u_\infty} = 1.99\,\mathrm{Re}_d^{\ -1/8}$$

これらの式より式(34)は求めることができる．

（４） Kalman のアナロジによる式 [2]

$$Nu_m = \frac{0.0323\,\mathrm{Re}_d^{\ 3/4}\,\mathrm{Pr}/\psi}{1 + 0.994 B\,\mathrm{Re}_d^{\ -0.125}(\mathrm{Pr} - 1)} \qquad ―――（35）$$

（Pr；広範囲，物性値は膜温度 T_f で評価）

この式は Kalman の乱流速度分布式を用いて，熱伝達率と流体摩擦との間の相似式を導出し，そのカルマンのアナロジ式から導出された関係式である．

この式はかなり広い範囲の Pr 数の値に対して成り立つ式であり，レイノルズのアナロジおよびプラントル・カルマンのアナロジを拡張したものである．

式(35)における係数 B および温度比ψの値は図 14，図 15 より得る．

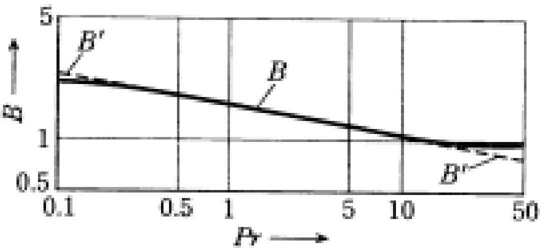

図 14　係数 B[2)]

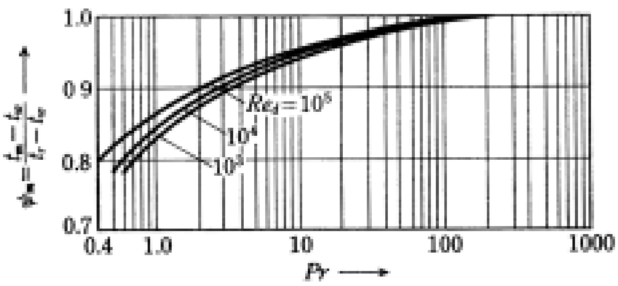

図 15　温度比ψ[2)]

図 14 において，0.5 < Pr < 5 の範囲では B'＝1.58Re$^{-0.19}$ と近似することが出来る．
よって，式(35)は，

$$(35) \Leftrightarrow \quad Nu_m = \frac{0.0323\,\mathrm{Re}_d^{\,3/4}\,\mathrm{Pr}/\psi}{1+1.57\,\mathrm{Re}_d^{\,-0.315}(\mathrm{Pr}-1)} \qquad ———（35'）$$

（５） Petukhov の式

$$Nu_m = \frac{(C_f/2)\cdot \mathrm{Re}_d\,\mathrm{Pr}}{K_1(C_f)+(C_f/2)^{1/2}K_2(\mathrm{Pr})\cdot(\mathrm{Pr}^{2/3}-1)} \qquad ———（36）$$

壁面摩擦係数；$C_f = \tau_w/(\rho U_m^2/2) = (3.64\log_{10}\mathrm{Re}_d - 3.28)^{-2}$

$K_1(C_f) = 1+13.6C_f,\ K_2(\mathrm{Pr}) = 11.7+1.8\,\mathrm{Pr}^{-1/3}$

（$10^4 < \mathrm{Re}_d < 5\times10^6$，$0.5 < \mathrm{Pr} < 2000$，物性値は$T_f$ で評価）

（６） Notter-Sleicher の式

$$Nu_m = 5+0.016\,\mathrm{Re}_d^a\,\mathrm{Pr}^b \qquad ——— （37）$$

$a = 0.88-0.24/(4+\mathrm{Pr}),\quad b = 0.33+0.5\exp(-0.6\,\mathrm{Pr})$

（$10^4 < \mathrm{Re}_d < 10^6$，$0.1 < \mathrm{Pr} < 10^4$，物性値は$T_f$ で評価）

これら，式(32)～(37)の実験式と実験測定式(31)の比較を行う．
まず，今回の実験では，プラントル数がほぼ一定であったので，

$$\mathrm{Pr} = const \qquad ——— （38）$$

として，６度の測定の平均値を Pr の値として取扱う．

表６　流体平均温度T_bおよに膜温度T_f における Pr

No.	$\mathrm{Pr_b}$	$\mathrm{Pr_f}$
1	0.710	0.704
2	0.710	0.704
3	0.710	0.703
4	0.710	0.703
5	0.709	0.703
6	0.709	0.703
平均値	0.710	0.703

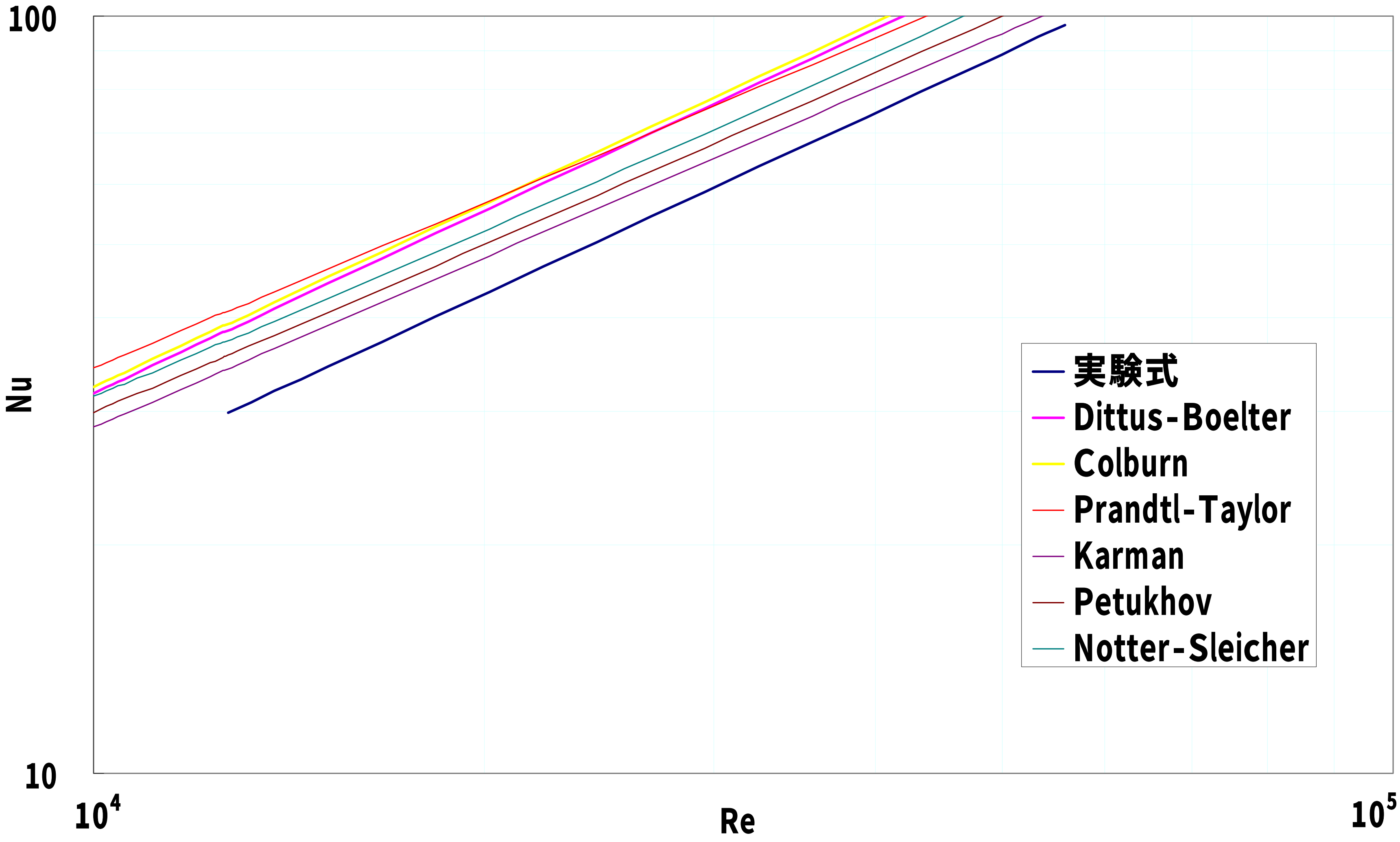

図16　本実験式と関係式

図 16 に実験より得た式(31)のグラフと，式(32)～(37)の関係式を示す.

この図を見ると，本実験式は式(32)～(37)の関係式よりも Nu 数が若干下回っている．誤差としては，最も差の大きい Colburn の式や Prandtl-Taylor の式に対しては－23%程度, 最も差の小さい Kalman の式に対しても－10%前後の誤差が生じている．この原因としては次の３つが考えられる.

① 温度差による物性値の誤差
② 断熱性
③ 壁温度の誤差

① 温度差による誤差

今回の実験および考察に用いる関係式(32)～(37)の物性値はすべて２つの温度差を単純に平均する方法で，流体の温度や壁付近の温度を求めている.

しかしながら実際の温度は２つの平均であるわけではないので, ２間の温度差が大きくなれば, その分の誤差が大きくなる. 物性値には温度依存性があるため, 温度の誤差は即ち結果の誤差となる.

今回の実験では扱う最高温度が 100℃と低温である. 流体の温度差は流体の流入温度 T_i と出口温度 T_e で 40℃程度．壁温度 T_w と T_b の差は約 60℃である．60℃の温度差でも空気の粘度や密度は 10～20%程度異なる. しかし, 実際の流れでも温度は中間的な温度を示すため, 最大で 10～20%の差があるといっても，実際の誤差はもっと小さい．また，最も重要となるプラントル数や定圧比熱は，この温度差ではほとんど変化しない.

したがって，温度差の誤差がヌッセルト数の結果に対して 10～20%も誤差を生じさせるとは考えにくく，誤差の原因はもっと他の要因によるものであると思われる.

また，作動流体（空気）を計算の過程において理想気体として扱ったが，今回の実験では気体の温度が常に 100℃以下であるので比熱の変化も小さく, 実験に影響を与えるほどの誤差は無いと言える.

② 断熱性

3.3 節（p.3,4）において，伝熱管から流入する熱量はすべてエンタルピ増加として使われると仮定し，さらに熱量のもれも仮定していない.

今回の実験に使用した系では，仕事としては管内摩擦損失のみであるので，式(6),(7)で仕事をゼロと仮定し, 系への流入熱量がすべてエンタルピの増加となることは誤差要因とはならない．しかし, その熱量はすべてが作動流体への熱の移動となっているわけではなく，必ず熱がもれている. 伝熱管の中では, 常に蒸気が送り込まれるために一定温度が保たれているが，伝熱管の前後では断熱とは言えない.

そのため，伝熱管の入口付近では伝熱管から伝わる熱で作動流体が予加熱されてしまい, 伝熱管から排出された後では外部へ熱の放出が起こる．したがって，式(2)と式(8)はイコールの関係ではなく,

$$\alpha S \varDelta \theta > mC_p\left(T_e - T_i\right)$$

$$\Leftrightarrow \qquad \alpha > \frac{mC_p\left(T_e - T_i\right)}{S \varDelta \theta}$$

となり，実験から得られる熱伝達率は，実際の熱伝達率より低くなってしまう.

よって，ヌッセルト数は熱伝達率に依存するので（ $Nu \propto \alpha$ ）図 16 のようにヌッセルト数が低くなったと言える.

③ 壁温度

今回の実験では壁温度を蒸気の飽和温度である 100℃としている．

実験で使用した液体が純水であれば沸点が 100℃であるが, 仮に水道水を使用する場合は蒸気の飽和温度が変化するため，実験に誤差を生じる．

伝熱管の冷却面では, 飽和蒸気が飽和温度よりも低い温度に接するため蒸気が凝縮を始める．また，今回の実験では冷却面が水平管であるので，凝縮液が壁を濡らす場合に生じる液膜は薄く，そのため壁面上ではほぼ沸点に保たれる．

よって, 壁温度は蒸気の沸点と等しくなるが，今回の実験に使用した蒸気の沸点は得られていないので，伝熱管に流入する液体の沸点の測定もすべきであった.

ちなみに，沸点が２℃違うと⊿θの値は 3～4%程度の誤差を生じる.

よって，これらの理由で図 16 のように本実験式と式(32)～(37)の関係式とに誤差を生じていると思われるが，①,③の誤差は小さいので最も大きな要因は②である.

６． 課題

６．１ 対数平均温度差

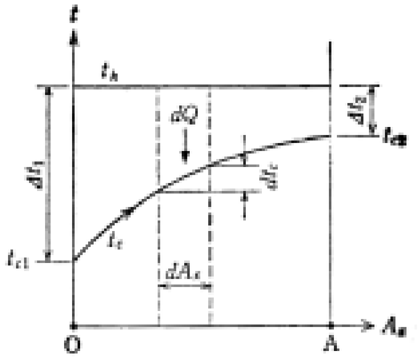

図 17　熱交換器内の温度分布[3]

図 17 に示すような熱交換器を考える．

この場合, 蒸気側では凝縮が起こり蒸気温度$t_h = T_w$は一定である．温度差⊿ｔは冷却水の入口端で最大，出口端で最小である．管の単位面積を通して単位時間に蒸気から水に伝わる熱量は⊿ｔが小さくなるほど小さくなるので，冷却水の温度t_cは図 17 に示すようにはじめは急に上昇するが, 出口に近づくにしたがい温度上昇は緩やかになる．このように⊿ｔが変化する場合にも⊿ｔが一定の場合と同じように，伝熱面積 A を通して単位時間に伝熱される熱量 Q の計算には次式を用いる．

$$Q = \alpha \cdot \varDelta t_m \cdot A \qquad ———（39）$$

ここで，$\varDelta t_m$はある種の平均温度差である．

また，微小な伝熱面積dA_xを通して伝わる熱量dQは,

$$dQ = \alpha(t_h - t_c)dA_x = \frac{mC_p}{\rho}dt_c$$

で表されるので，冷却水の入口および出口の温度をそれぞれt_{c1}およびt_{c2}とすれば，上式を入口から出口まで積分することにより次式が得られる．

$$\alpha\int_1^2 dA_x = \frac{mC_p}{\rho}\int_{t_{c1}}^{t_{c2}}\frac{1}{t_h - t_c}dt_c$$

$$\Leftrightarrow \quad \alpha A = \frac{mC_p}{\rho}\cdot\ln\frac{t_h - t_{c1}}{t_h - t_{c2}}$$

よって，熱量 Q は次式で表される．

$$Q = \frac{mC_p}{\rho}(t_{c2} - t_{c1}) = \alpha\cdot\frac{t_{c2} - t_{c1}}{\ln\{(t_h - t_{c1})/(t_h - t_{c2})\}}\cdot A \qquad ———（40）$$

式(39)と式(40)で比較すると，

$$\varDelta t_m = \frac{t_{c2} - t_{c1}}{\ln\{(t_h - t_{c1})/(t_h - t_{c2})\}} \qquad ―――(41)$$

で与えられており，この $\varDelta t_m$ が対数平均温度差である．

式(41)が正しい平均温度差を与えるのは次のような条件を満たす場合に限られる．

① 装置は外部と熱的に完全に絶縁されている．
② 熱伝達率αは装置を通して一様．
③ 気化あるいは液化を伴う場合以外は流量および比熱はかわらない．
④ 両方の流体は平行に流れている．ただし，そのいずれかあるいは両方とも気化あるいは液化している場合には平行であることを要さない．
⑤ 壁を通して熱は厚さ方向にだけ流れる．

６．２ 伝熱管外表面で飽和蒸気が凝縮し，凝縮温度は 100℃，そのときの熱伝達率を 6000[W/(m²K)]としたときの伝熱管内温度.（外径；25.33[mm], 熱伝導率；80[W/(m・K)]）

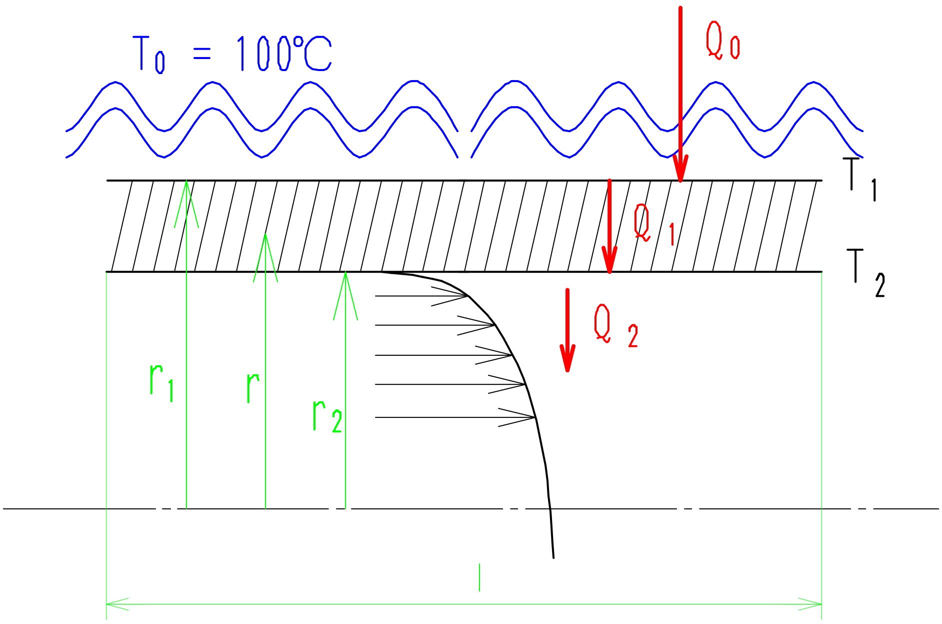

図 18 伝熱モデル

ニュートンの冷却法則より，Q_0 は，

$$Q_0 = \alpha(2\pi r_1 \ell)(T_0 - T_1) \qquad ―――(42)$$

フーリエの法則より，Q_1 は，

$$Q_1 = \lambda(2\pi r \ell)\frac{dT}{dr} \qquad ―――(43)$$

定常・発熱無しの条件下では，

$$Q_0 = Q_1 = Q_2 = Q \qquad ―――(44)$$

したがって，式(43),(44)より，

$$Q = \lambda(2\pi\, r\, \ell)\frac{dT}{dr}$$

$$\Leftrightarrow \quad dT = \frac{Q}{2\pi\ell\lambda}\cdot\frac{1}{r}dr$$

$$\Leftrightarrow \quad \int_1^2 dT = \frac{Q}{2\pi\ell\lambda}\int_{r_1}^{r_2}\frac{1}{r}dr$$

$$\Leftrightarrow \quad T_2 - T_1 = \frac{Q}{2\pi\ell\lambda}\ln\frac{r_2}{r_1}$$

$$\therefore T_2 = \frac{Q}{2\pi\ell\lambda}\ln\frac{r_2}{r_1} + T_1$$

また，T_1は，式(42)より，

$$(42) \Leftrightarrow \quad T_1 = T_0 - \frac{Q}{2\pi\, r_1\ell\alpha}$$

であるので，T_2は，

$$T_2 = \frac{Q}{2\pi\,\ell}\left(\frac{1}{\lambda}\cdot\ln\frac{r_2}{r_1} - \frac{1}{r_1}\right) + T_0 \qquad ———（45）$$

実験によって求めた熱量 Q および式(45)より求めたT_2を表７に示す．

したがって，表７より$T_2 \approx 100$であるので，壁温度T_wを蒸気の飽和温度として問題ないことが伺える．

表7　T_2の計算

No.	Q [W]	T_2 [℃]
1	644.9	99.82
2	580.3	99.84
3	485.3	99.86
4	358.7	99.90
5	271.2	99.92
6	179.9	99.95

６．３　Nu=f(Re,Pr)の各種実験式と実験結果との比較

5.3 節（p.13～18）参照.

６．４ 熱伝達率およびヌッセルト数がレイノルズ数とプラントル数によりNu=f(Re,Pr)により整理されている理由

≪バッキンガムのΠ定理≫

バッキンガムのΠ定理とは，ある物理現象に関する物理量の数が$v_1, v_2, \cdots, v_n$のｎ個であり，これらの間に次式のような関数関係があるものとする．

$$f(v_1, v_2, \cdots, v_n) = 0$$

このとき物理量$v_1, v_2, \cdots, v_n$を表すのにｋ個の基本単位（質量；M，長さ；L，時間；T，など）が必要であるとすると，この物理現象は$m = n - k$個の無次元パラメータ；$\Pi_1, \Pi_2, \cdots, \Pi_m$を用いて次式のように表すことができる．

$$\phi(\Pi_1, \Pi_2, \cdots, \Pi_m) = 0$$

このように，無次元積が求まることをバッキンガムのΠ定理という．

このバッキンガムのΠ定理を用いてヌッセルト数の導出をする．

まず，熱伝達率α[W/(m²K)]=[J/(s・m²K)]が依存するパラメータが次の６パラメータのみと考える．

ρ[kg/m³]，μ[kg/(s・m)]，ｃ[m²/(s²K)]，λ[kg・m/(s³K)]，L[m]，U[m/s]

したがって，Π定理にしたがって熱伝達率の関数関係式は，

$$\alpha = f\left(\rho^{\Pi_1}, \mu^{\Pi_2}, c^{\Pi_3}, \lambda^{\Pi_4}, L^{\Pi_5}, U^{\Pi_6}\right)$$

単位は，

$$\left[ML^0T^{-3}\theta^{-1}\right] = \left[ML^{-3}\right]^{\Pi_1} \cdot \left[ML^{-1}T^{-1}\right]^{\Pi_2} \cdot \left[L^2T^{-2}\theta^{-1}\right]^{\Pi_3} \cdot \left[MLT^{-3}\theta^{-1}\right]^{\Pi_4} \cdot \left[L\right]^{\Pi_5} \cdot \left[LT^{-1}\right]^{\Pi_6}$$

$$\begin{cases} M；\Pi_1 + \Pi_2 + \Pi_4 = 1 \\ L；-3\Pi_1 - \Pi_2 + 2\Pi_3 + \Pi_4 + \Pi_5 + \Pi_6 = 0 \\ T；-\Pi_2 - 2\Pi_3 - 3\Pi_4 - \Pi_6 = -3 \\ \theta；-\Pi_3 - \Pi_4 = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \Pi_1 = \Pi_6 \\ \Pi_2 = \Pi_3 - \Pi_6 \\ \Pi_4 = 1 - \Pi_3 \\ \Pi_5 = \Pi_6 - 1 \end{cases}$$

よって，

$$\begin{aligned} \alpha &= \rho^{\Pi_6} \cdot \mu^{\Pi_3 - \Pi_6} \cdot c^{\Pi_3} \cdot \lambda^{1-\Pi_3} \cdot L^{\Pi_6 - 1} \cdot U^{\Pi_6} \\ &= \frac{\lambda}{L} \cdot \left(\frac{\mu \cdot c}{\lambda}\right)^{\Pi_3} \left(\frac{\rho UL}{\mu}\right)^{\Pi_6} \end{aligned}$$

ここで，$Nu = \dfrac{\alpha \cdot L}{\lambda}$，$\Pr = \dfrac{\mu \cdot c}{\lambda}$，$\mathrm{Re} = \dfrac{\rho UL}{\mu}$より

$$\Leftrightarrow \qquad Nu = \Pr^{\Pi_3} \mathrm{Re}^{\Pi_6}$$

であるので，

ヌッセルト数 Nu は次式で表すことができる．

$$Nu = k \cdot \mathrm{Re}^m \Pr^n \qquad \text{（ｋ,m,n は定数）}$$

７．　結言

今回の実験によって，伝熱管から空気への熱伝達率を測定することができた．結果は，流量が多いほど熱伝達率が高く，質量流量mと熱伝達率αには一次関数で近似できる関係にあった（p.11・図 10）．また，熱伝達率が低いときには膜温度が高いことも確認できた（p.11・図 11）．このことは実生活の中でも体験していたことで，例えばレーシングカートのラジエータなどでは，ラジエータポンプなどは車軸に取り付けたプーリとベルト車で流量を調整したり，走行中に水温計を見ながらラジエータにガムテープやカバーの開閉をして水温を適正温度にすることなどが行なわれており，今回の実験が工学的にも重要であることも確認できた．

また，熱伝達率（ヌッセルト数）はレイノルズ数とプラントル数に依存していることも確認できた．その依存の様子もバッキンガムのΠ定理および熱伝達率に関する相似式により導出されていることも確認できた．

バッキンガムのΠ定理に基づいた

$$Nu = k \cdot \mathrm{Re}^m \, \mathrm{Pr}^n$$

の関係式で今回の実験結果を表現すると，他のよく知られている関係式に比べて Nu 数が小さくなった．私見としては，これは実験装置の断熱性に起因するためという結論に至った．伝熱管内では水の凝縮により温度が一定に保たれるが，伝熱管前後では想定していない熱の授受があるため，測定値した温度差が実際よりも小さくなり，そのために熱伝達率が小さく算出されてしまったと思われる．

≪参考文献≫

１）関信弘 編，伝熱工学，森北出版（2002），p.209,210
２）谷下市松 著，伝熱工学，裳華房（1986），p.122~124,136
３）西川兼康・藤田恭伸 共著，伝熱学，理工学社（1988），p.355~357
４）島章・小林陵二 著，水力学，丸善株式会社（1980），　p.176～202