１．　実験の目的

細線加熱法による物質の熱伝導率の精密測定が,最近の電子機器の進歩により迅速かつ容易に行えるようになった．この測定法は，気体，液体，固体と種々の物質について広く用いられている．この実験では，主に液体の熱伝導率測定にこの方法を適応し，測定の原理とマイクロコンピュータを用いたデータ処理法を習得し,さらにデータに対する不確かさについて検討する．

２．　測定原理

図１のように，無限に広がった媒体中に置かれた太さの無い無限長さの直線状の熱源（線状熱源）を仮定する．

熱伝導によって物体内を移動する熱量は,“熱伝導に関するフーリエの法則”を用いて表すことができる．この法則は熱流に直角な単位面積をとおして，単位時間当たりに流れる熱流速 q [W/m²]は熱流の方向の温度傾斜 $\partial T/\partial r$ [K/m]に比例する，というもので次式で表される．

$$q = -\lambda \frac{\partial T}{\partial r} \quad [\mathrm{W/m^2}]$$

ただし，ｒ[m]は熱流方向に沿って測った距離であり，熱力学第二法則・熱の流れ一方向性（熱が高熱源から低熱源へ移動）より図２のように熱流方向に温度傾斜が負になるため，式の右辺に負の記号を付けてｑが正になるようにしてある．

また，比例定数λ[W/(m・K)]は熱伝導率と呼ばれ，単位温度傾斜あたりの熱流速の大きさを意味している．したがって，熱の良導体のλは大きい値を示す．厳密にはλは温度の影響を受けるが，実用上は，温度範囲を限って一定値扱いすることが多い．

このとき，距離ｒ離れた微小体積について，ｒ方向の流入熱量 Q_{in}（単位長さあたり）はフーリエの法則より次式で表され，

$$Q_{in} = q \cdot A \quad [\mathrm{W}]$$

ここで，Ａは面積[m²]である．面積Ａは，$A = 2\pi r \times 1$ [m²]なので，流入熱量 Q_{in} は，

$$Q_{in} = -\lambda \frac{\partial T}{\partial r} 2\pi r \qquad ―――（１）$$

で表される．

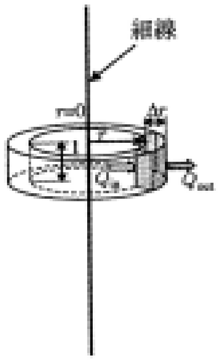

図１　無限媒体中の熱伝導

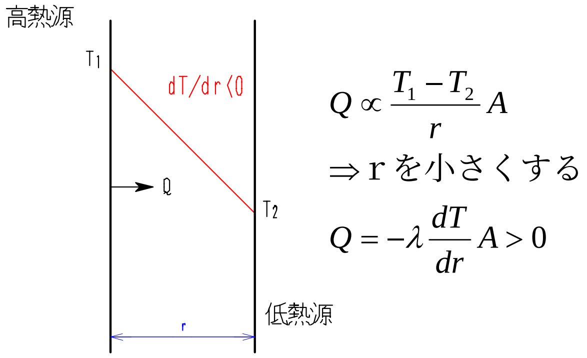

図２　フーリエの法則概略図

いま，$Q_{in} = Q(r_0)$ とすると，距離ｒ$_0$ から⊿ｒだけ離れた場所での熱量 Q_{out} はテーラー展開より，

$$Q_{out} = Q(r_0 + \varDelta r) = Q(r_0) + \frac{\partial Q(r_0)}{\partial r} \cdot \varDelta r + \frac{1}{2!}\frac{\partial^2 Q(r_0)}{\partial r^2} \cdot \varDelta r^2 + \cdots$$

$$\approx Q_{in} + \frac{\partial Q_{in}}{\partial r} dr \quad [\mathrm{W}]$$ ―――（２）

となる．微小体積に流入する熱量と流出する熱量の差は単位時間当たり内部エネルギ上昇をもたらす．

式(3)より単位時間当たりのエネルギ増加量⊿Q は，

$$\varDelta Q = Q_{in} - Q_{out} = -\frac{\partial}{\partial r}\left(-\lambda \frac{\partial T}{\partial r} 2\pi r\right) dr = 2\pi\lambda \frac{\partial}{\partial r}\left(r \frac{\partial T}{\partial r}\right) dr$$ ―――（３）

一方，　［加えられた熱量］＝［質量］×［比熱］×[温度差]　であたられる．

温度差⊿T[K]は，温度関数 T=T(r_0,t)を用いて表すと，

$$T(t_0 + dt) = T(t_0) + \frac{\partial T(t_0)}{\partial t} dt + \frac{1}{2!}\frac{\partial^2 T(t_0)}{\partial t^2} dt^2 + \cdots$$

$$\Leftrightarrow \varDelta T = T(t_0 + dt) - T(t_0) = \frac{\partial T(t_0)}{\partial t} dt = \frac{\partial T}{\partial t} dt$$

また，密度をρ[kg/m^3]，比熱をｃ[J/(kgK)]とすると，単位時間当たりに加えられた熱量⊿Q は次式でも表すことができる．

$$\varDelta Q = \rho \cdot 2\pi r dr \cdot c \cdot \frac{\partial T}{\partial t}$$

したがって，上式と式(3)より熱源からの距離ｒの点における温度変化が，次の偏微分方程式で表される．

$$2\pi\rho c r \frac{\partial T}{\partial t} dr = 2\pi\lambda \frac{\partial}{\partial r}\left(r \frac{\partial T}{\partial r}\right) dr$$

$$\Leftrightarrow \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\lambda}{\rho c}\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r \frac{\partial T}{\partial r}\right)$$

ここで，熱拡散率(温度伝導率)；$\alpha \equiv \dfrac{\lambda}{\rho c}$　[W/m^2 K]　を用いると，上式は次式となる．

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \alpha \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r \frac{\partial T}{\partial r}\right)$$

$$\Leftrightarrow \frac{\partial T}{\partial t} = \alpha \frac{1}{r}\left(\frac{\partial T}{\partial r} + r \frac{\partial^2 T}{\partial r^2}\right)$$ ―――（４）

初期条件――ｔ＝0；　T=0

境界条件――ｔ＞0；　ｒ→∞で T=0　―――（６）

ｒ→0 で $q = -2\pi r \lambda \dfrac{\partial T}{\partial r}$

式(4)の偏微分方程式を解くために，相似変数 $x = \dfrac{r^2}{4\alpha t}$ を導入する．

T=T(x)を仮定．

$$\left\{\begin{aligned}
\frac{\partial T}{\partial t} &= \frac{dT}{dx}\cdot\frac{\partial x}{\partial t} = \frac{dT}{dx}\left(-\frac{r^2}{4\alpha t^2}\right) = -\frac{x}{t}\cdot\frac{dT}{dx} \\
\frac{\partial T}{\partial r} &= \frac{dT}{dx}\cdot\frac{\partial x}{\partial r} = \frac{dT}{dx}\cdot\frac{r}{2\alpha t} = \frac{2x}{r}\cdot\frac{dT}{dx} \\
\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} &= \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{2x}{r}\cdot\frac{dT}{dx}\right) \\
&= \frac{2}{r}\frac{dT}{dx}\cdot\frac{\partial x}{\partial r} + 2x\frac{dT}{dx}\cdot\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\right) + \frac{2x}{r}\cdot\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{dT}{dx}\right) \\
&= \frac{2}{r}\cdot\frac{r}{2\alpha t}\cdot\frac{dT}{dx} - 2x\cdot\frac{1}{r^2}\cdot\frac{dT}{dx} + \frac{2x}{r}\cdot\frac{d^2T}{dx^2}\cdot\frac{\partial x}{\partial r} \\
&= \frac{4x}{r^2}\cdot\frac{dT}{dx} - \frac{2x}{r^2}\cdot\frac{dT}{dx} + \frac{2x}{r}\cdot\frac{r}{2\alpha t}\cdot\frac{d^2T}{dx^2} \\
&= \frac{4x^2}{r^2}\cdot\frac{d^2T}{dx^2} + \frac{2x}{r^2}\frac{dT}{dx}
\end{aligned}\right.$$

これを式(4)に代入すると,

$$\begin{aligned}
(4) &\Leftrightarrow -\frac{x}{t}\cdot\frac{dT}{dx} = \alpha\frac{1}{r}\left[\frac{2x}{r}\cdot\frac{dT}{dx} + r\left(\frac{4x^2}{r^2}\cdot\frac{d^2T}{dx^2} + \frac{2x}{r^2}\cdot\frac{dT}{dx}\right)\right] \\
&\Leftrightarrow \frac{4x^2\alpha}{r^2}\cdot\frac{d^2T}{dx^2} + \left(\frac{4\alpha x}{r^2} + \frac{x}{t}\right)\cdot\frac{dT}{dx} = 0 \\
&\Leftrightarrow \frac{d^2T}{dr^2} + \left(\frac{1}{x} + x\cdot\frac{1}{x^2}\frac{r^2}{4\alpha t}\right) = 0 \\
&\Leftrightarrow \frac{d^2T}{dx^2} + \left(1 + \frac{1}{x}\right)\frac{dT}{dx} = 0
\end{aligned}$$

———（5）

初期条件・境界条件は,

$$\left.\begin{array}{llll}
t = 0,\ \text{および}\ r \to \infty & \Rightarrow\ x \to \infty & \text{で} & T = 0 \qquad \cdots① \\
r \to 0 & \Rightarrow\ x \to 0 & \text{で} & q = -\lambda\dfrac{dT}{dx}\left(\dfrac{2\pi}{r}\right)\cdot 2\pi r = -4\pi\lambda x\dfrac{dT}{dx} \qquad \cdots②
\end{array}\right\}$$

———（6)'

式(5)において、$\frac{dT}{dx} = p$ とおくと,

$$\begin{aligned}
(5) &\Leftrightarrow \frac{dp}{dx} + \left(1 + \frac{1}{x}\right)p = 0 \\
&\Leftrightarrow \frac{1}{p}dp = -\left(1 + \frac{1}{x}\right)dx \\
&\Leftrightarrow \ln p = -x - \ln x + C \qquad \text{（C;積分定数）} \\
&\Leftrightarrow \quad p = C_1\frac{e^{-x}}{x} \qquad \text{（}C_1\text{＝}e^c\text{；積分定数）}
\end{aligned}$$

$p=\dfrac{dT}{dx}$ より、

$$\frac{dT}{dx}=C_1\frac{1}{x}e^{-x}$$

$$\Leftrightarrow T=C_1\int_0^x\frac{1}{x}e^{-x}dx+C_2\quad[\mathrm{K}]\qquad\qquad （C_2；積分定数）$$

条件②より， $q=-4\pi\lambda x\cdot C_1\dfrac{e^{-x}}{x}\qquad(x\to 0)$

$$\Leftrightarrow C_1=-\frac{q}{4\pi\lambda}$$

条件①より， $x\to\infty$ で，T=0 なので，

$$0=-\frac{q}{4\pi\lambda}\int_0^\infty\frac{1}{x}e^{-x}dx+C_2$$

$$\Leftrightarrow C_2=\frac{q}{4\pi\lambda}\int_0^\infty\frac{1}{x}e^{-x}dx$$

したがって，得られる T の式は，

$$T=-\frac{q}{4\pi\lambda}\left(\int_0^x\frac{1}{x}e^{-x}dx-\int_0^\infty\frac{1}{x}e^{-x}dx\right)$$

$$=\frac{q}{4\pi\lambda}\int_x^\infty\frac{1}{x}e^{-x}dx$$

ここで，指数積分； $E_i(-x)=-\int_x^\infty\frac{1}{x}e^{-x}dx$ ―――（8）

を用いると，T の式は，

$$T=-\frac{q}{4\pi\lambda}E_i(-r^2/4\alpha t)\quad[\mathrm{K}]$$ ―――（7）

で表される． q [W/s]は熱源の単位長さあたりの発熱量， λ [W/(m・K)]は熱伝導率である．

ところで， x が十分小さいとき⇔ t が十分大きいとき， e^{-x} はマクローリン展開より，

$$e^{-x}=e^0+e^0(-x)+\frac{e^0}{2!}(-x)^2+\cdots\cdots\approx 1-x$$

したがって，式(8)は，

$$E_i(-x)=-\int_x^\infty\frac{1}{x}e^{-x}dx$$

$$=-\left[\ln x\cdot e^{-x}\right]_x^\infty-\int_x^\infty\ln x\cdot e^{-x}dx$$

$$
\begin{aligned}
&= \ln x \cdot e^{-x} - \int_0^{\infty} \ln x \cdot e^{-x} dx + \int_0^{x} \ln x \cdot e^{-x} dx \\
&\approx (1-x)\ln x + \gamma + \int_0^{x} (1-x)\ln x \cdot dx \\
&= (1-x)\ln x + \gamma - x + x\ln x - \frac{1}{2}x^2 \ln x + \frac{1}{4}x^2 \\
&\approx \gamma + \ln x
\end{aligned}
$$

ただし，　$\gamma = -\int_0^{\infty} \ln x \cdot e^{-x} dx = 0.5772\cdots$ ：オイラー定数

したがって，熱源の表面温度 T は，

$$T(a,t) = \frac{q}{4\pi\lambda}\left(-\gamma - \ln\frac{a^2}{4\alpha t}\right) = \frac{q}{4\pi\lambda}\left(\ln\frac{4\alpha t}{a^2} - \gamma\right) \qquad ———（9）$$

ただし，$a(\cong 0)$ [m]は，熱源の半径である．

　さらに，式(9)を $\ln t$ で微分すれば，

$$\frac{dT}{d\ln t} = \frac{q}{4\pi\lambda}.$$

$$\Leftrightarrow \lambda = \frac{q}{4\pi} \Big/ \frac{dT}{d\ln t} \qquad ———（10）$$

が得られる．式(10)が非定常細線法のの基礎式であり，細線の単位長さあたりの発熱量ｑと細線の温度の時間変化 $dT/d\ln t$ を測定することにより，熱伝導率λが得られる．

３．　装置と機器

試料——スピンドル油

タングステン細線（φ5[μm]，長さ 40.90[mm]），熱電対，ホイーストンブリッジ回路，コンピュータ

４．　測定装置とデータ処理

４．１ 測定装置

式(10)を用いて実際に熱伝導率を測定するには，可能な限り小さい径の細線を用い，その長さを直径に比べて十分長く取る必要がある．そして，試料容器はその壁が細線の温度上昇に影響を及ぼさない程度に大きくし，これら全体を一定温度に保つ必要がある．測定装置を図３に示す．今回の実験で使用する試料にはスピンドル油を用いる．また使用する細線は，直径 5μm のタングステン線で長さは約 40mmで直径の 8000 倍以上とられており，試料容器全体が恒温層の中に浸される．試料容器も今回は円管形であるものを用い，直径は約30mmとこちらもタングステン線の直径の 6000 倍程度となっている．

細線の時間的な温度上昇を求めるのには，図４に示す測定回路が用いられる．加熱細線の抵抗 R と抵抗 P, Q, R,S からなるホイーストンブリッジ回路 ACBD について, CD 間の電位差 V は次式で定義される．

$$V = E\left(\frac{Q}{P-S} - \frac{S}{R+S}\right) \qquad ―――（11）$$

スイッチ S_1 を抵抗 r_2 側にし，水銀リレーを閉じてブリッジに電位差を与えると抵抗 R が発熱を始め，それに伴って細線の温度，したがって電気抵抗地が変化する．細線の電気抵抗 R の温度による変化が，

$$R = R_0(1+\beta \varDelta T) = R_0 + \varDelta R \qquad ―――（12）$$

で表され（R_0 は温度 T_0 における電気抵抗値，⊿T は T_0 からの温度差，βは電気抵抗の温度係数である），$\varDelta R/(R_0+S) \ll 1$ とみなすと，式(11)を温度で微分して，

$$\frac{dV}{dT} \approx ES \cdot \frac{dR}{dT} \Big/ (R_0+S)^2 \qquad ―――（13）$$

が得られる．また細線の単位長さあたりの発熱量 q は, 抵抗 R を流れる電流を i, 長さを l として,

$$q = \frac{Ri^2}{l} = \frac{R}{l}\left(\frac{E}{R+S}\right)^2 \approx \frac{R_0}{l}\left(\frac{E}{R_0+S}\right)^2 \qquad ―――（14）$$

で表されるので，式(10)の温度を，$\frac{dV}{d\ln t} = \frac{dV}{dT} \cdot \frac{dT}{d\ln t}$ の関係で電位差に変換し，式(13), (14)を代入すれば,

$$\lambda = \frac{q}{4\pi} \cdot \frac{dV}{dT} \Big/ \frac{dV}{d\ln t} \approx \frac{R_0 SE^3}{4\pi l (R_0+S)^4} \cdot \frac{dR}{dT} \Big/ \frac{dV}{d\ln t} \qquad ―――（15）$$

が得られる．結局細線の温度変化がブリッジ回路の不平衡電位差の変化に置き換えられる．

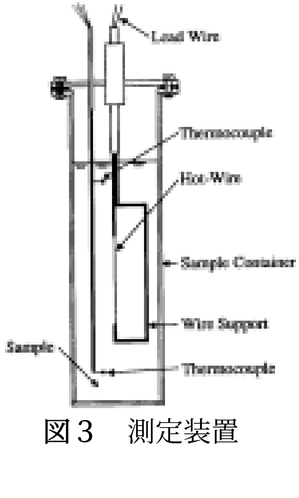

図３　測定装置

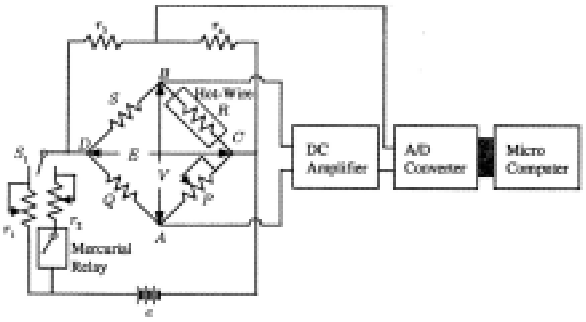

図４　測定回路

４．２ データの取り込みと処理

ブリッジの不平衡電圧は，直流増幅させた後 A/D 変換（アナログ／デジタル変換）される．本実験では，分解能 12 ビット，変換電圧範囲 0～5V の A/D 変換器を用いる．入力チャンネルは２つあり，第１チャンネル(Ch1)をブリッジの不平衡電圧 V の測定，第２チャンネル(Ch2)をブリッジ電圧 E の測定（この電圧は変換電圧範囲を超えることがあるので，実際の測定では r_3，r_4 により分圧された電圧を測定する）および変換開始信号（トリガ）に用いる．A/D 変換器は 0V を&H0000(0)に，5V を&H0FFF(4095)に変換する．不平衡電圧の増幅率は，出力が 5V を超えない範囲でなるべく大きく設定する．また，A/D 変換された信号はパソコンのメモリに直接転送される（DMA 転送）．

５．　測定

５．１ 測定手順

以下の手順で，異なる試料温度について測定を繰り返す．

① 熱電対の出力をデジタルマノメータ（DMM）で測定し，試料容器内の温度が一様であることを確認する．

② スイッチ S_1 を開放にして，細線の抵抗 R と抵抗 S を DMM により測定する．

③ スイッチ S_1 を抵抗 r_1 側にし，ブリッジに微小電流を流して，不平衡電位差 V が 0V（増幅器の出力わ DMM で確認する）になるように可変抵抗 P を調整する．

④ A/D 変換器の準備が整っていることを確認した後，スイッチ S_1 を抵抗 r_2 側にし，水銀リレースイッチを閉じて（2～3 秒間），不平衡電位差 V とブリッジ電圧 E をコンピュータのメモリに記憶する．このとき，前述の測定原理の通り，ｔが微小な時の温度すなわち熱電対の起電力を測定する．実際にはｔは零近傍は避け，0.01[s]から 1[s]までの起電力を 0.001[s]の間隔で記録する。

⑤ グラフを描画して適当な結果が得られていることを確認し，データをハードディスクに保存する．

⑥ プログラム（リスト１・p.9）を実行させ，データの確認とデータの読み出しを行い，測定を終える． ただし，取り得た値は 1000 個にのぼる．この測定では得た値の傾きを求めることが目的なので，作業の簡略化のために 1000 個の値から等間隔に 25 個の値を取り出す。このとき傾きは，⊿V[mV]と⊿logt の商となっているため一つの時間間隔が $10^{1/12}$[s]となることに注意が必要である．

```
***Sample Program***
10    NDATA=1000:NOUT=25:0.001
20    CREEN 3: CLS 3: LINE(0,0)-(639,399),,B
30    DIM TIME(NDATA),V(NDATA),E(NDATA)
40    OPEN “File_name” FOR INPUT AS #1
50    FOR I%=1 TO NDATA
60    INPUT #1, TIME(I%),V(I%),E(I%)
70    NEXT I%
80    CLOSE
90    FOR J%=0 TO Nout-1
100   T=10^(J%/12-2)
110   N%=1000*T
120   X%=LOG(N%)/LOG(10)*640/4
130   Y1%=-V(N%)*400/5+400
140   Y2%=-E(N%)*400/5+400
150   PSET(X%, Y1%): PSET(X%, Y2%)
160   ‘LPRINT USING “     ###.####”; TIME(N%),V(N%),E(N%)
170   NEXT J%
```

リスト１　データ処理プログラム

５．２ 測定結果

＜測定１＞常温（室温状態）での熱伝導率の測定

熱伝導率を測定するために，恒温槽温度・不平衡電位差 V・ブリッジ電圧 E を測定する．

（１） 恒温槽温度 T_1 の測定

熱電対を用いて発生する電位差を測定し，測定した起電力より温度を求める．P.7・図３にもあるように，温度測定は細線の上下２ケ所で測定し，２つの平均値を恒温槽温度 T_1 とする．なお，この熱電対の起電力 e[mV]と温度 T[℃]の関係は，式(16)となっている．

$$T = 25.567e - 0.2860e^2 \qquad ―――（16）$$

測定起電力

熱電対１（上）	0.904　[mV]
熱電対２（下）	0.912　[mV]

温度

22.88　[℃]
23.08　[℃]

したがって，　[恒温槽温度 T_1]＝$\dfrac{22.88 + 23.08}{2} = 22.98$ [℃]

（２） ブリッジ抵抗と加熱細線抵抗（R_{01}）の測定

ブリッジ抵抗
2.0057　[kΩ]

加熱細線抵抗（R_{01}）
181.58　[Ω]

（３） 不平衡電位差 V[V]とブリッジ電圧 E[V]の測定

不平衡電位差 V・ブリッジ電圧 E を測定する際，測定器は 0～5[V]の範囲でしか適正に電圧の測定が行えない．そのため，電圧を増幅器を用いて，増幅および減衰させ適正範囲内におさめて測定することになる．したがって，以下に変換倍率および不平衡電位差 V とブリッジ電圧 E の測定値と変換値を示す.

- CH１の内容： [不平衡電位差 V]×[増幅器倍率]×[AD 変換精度（＝１）]
  ＝[不平衡電位差 V]×[出力電圧] / [校正入力電圧]×１

  [増幅器倍率]＝[出力電圧] / [校正入力電圧]＝[1.332 V] / [1.257 mV]=1060

- CH２の内容： [ブリッジ電圧 E]×[減衰率]×[AD 変換精度（＝１）]
  ＝[ブリッジ電圧 E]×[出力電圧] / [校正入力電圧]×１

  [減衰率]＝[出力電圧] / [校正入力電圧]＝[2.566 V] / [10.125 V]=0.2534

常温における不平衡電位差 V とブリッジ電圧 E の測定値，および前述の増幅率・減衰率を用いて増幅器による変換前の値を表１に示す.

また，表１よりブリッジ電圧 E の平均値は,

$$\overline{E}_1 = \frac{\sum E}{n} = 14.5676 \quad \text{[V]}$$

表１ 常温における不平衡電位差 V とブリッジ電圧 E

時間 t [s]	CH1 [V]	不平衡電位差V [V]		CH2 [V]	ブリッジ電圧E [V]
0.010	1.81396	1.71182	$\times 10^{-3}$	3.69141	14.5657
0.012	1.88965	1.78325	$\times 10^{-3}$	3.69141	14.5657
0.015	1.99463	1.88232	$\times 10^{-3}$	3.69385	14.5753
0.018	2.07764	1.96066	$\times 10^{-3}$	3.69141	14.5657
0.022	2.17285	2.05050	$\times 10^{-3}$	3.69141	14.5657
0.026	2.24609	2.11962	$\times 10^{-3}$	3.68897	14.5560
0.032	2.34619	2.21408	$\times 10^{-3}$	3.69141	14.5657
0.038	2.42676	2.29012	$\times 10^{-3}$	3.69141	14.5657
0.046	2.51709	2.37536	$\times 10^{-3}$	3.69141	14.5657
0.056	2.60742	2.46061	$\times 10^{-3}$	3.69385	14.5753
0.068	2.69287	2.54124	$\times 10^{-3}$	3.69385	14.5753
0.083	2.78320	2.62649	$\times 10^{-3}$	3.69141	14.5657
0.100	2.86377	2.70252	$\times 10^{-3}$	3.69141	14.5657
0.121	2.96387	2.79699	$\times 10^{-3}$	3.69385	14.5753
0.147	3.05420	2.88223	$\times 10^{-3}$	3.69141	14.5657
0.178	3.13965	2.96287	$\times 10^{-3}$	3.69141	14.5657
0.215	3.22998	3.04811	$\times 10^{-3}$	3.69141	14.5657
0.261	3.31543	3.12875	$\times 10^{-3}$	3.69141	14.5657
0.316	3.40332	3.21169	$\times 10^{-3}$	3.69141	14.5657
0.383	3.49121	3.29463	$\times 10^{-3}$	3.69141	14.5657
0.464	3.57666	3.37527	$\times 10^{-3}$	3.69141	14.5657
0.562	3.66943	3.46282	$\times 10^{-3}$	3.69141	14.5657
0.681	3.75977	3.54807	$\times 10^{-3}$	3.69385	14.5753
0.825	3.84766	3.63101	$\times 10^{-3}$	3.69385	14.5753
1.000	3.92822	3.70704	$\times 10^{-3}$	3.69141	14.5657

＜測定２＞恒温槽を過熱した際の熱伝導率の測定
　測定１と同様に，恒温槽温度・不平衡電位差 V・ブリッジ電圧 E を測定する．

（１）　恒温槽温度 T_2 の測定
　測定１同様に，熱電対の起電力を測定し，式(16)を用いて温度を求め，２つの温度の平均値を恒温槽温度 T_2 とする．

測定起電力

熱電対１（上）	2.211　[mV]
熱電対２（下）	2.232　[mV]

温度

55.13　[℃]
55.64　[℃]

したがって，　[恒温槽温度 T_2]＝ $\dfrac{55.13+55.64}{2}=55.39$ [℃]

（２）　ブリッジ抵抗と加熱細線抵抗（R_{02}）の測定

ブリッジ抵抗
2.0039　[kΩ]

加熱細線抵抗（R_{02}）
199.96　[Ω]

（３）　不平衡電位差 V[V]とブリッジ電圧 E[V]の測定
　CH１，CH２における増幅器による増幅率および減衰率は，測定１における増幅率と減衰率と同値を用いる．

- CH１：[増幅器倍率]＝[出力電圧] / [校正入力電圧]＝[1.332 V] / [1.257 mV]=1060
- CH２： [減衰率]＝[出力電圧] / [校正入力電圧]＝[2.566 V] / [10.125 V]=0.2534

　加熱温度における不平衡電位差 V とブリッジ電圧 E の測定値，および前述の増幅率・減衰率を用いて増幅器による変換前の値を表２（p.12）に示す．

　また，表１（p.10）よりブリッジ電圧 E の平均値は，

$$\overline{E}_2=\frac{\sum E}{n}=14.5641 \text{ [V]}$$

表２　加熱温度における不平衡電位Ｖとブリッジ電圧Ｅ

時間 t [s]	CH1 [V]	不平衡電位差V [V]		CH2 [V]	ブリッジ電圧E [V]
0.010	2.25342	2.12654	$\times 10^{-3}$	3.69385	14.5753
0.012	2.34863	2.21639	$\times 10^{-3}$	3.69141	14.5657
0.015	2.45605	2.31776	$\times 10^{-3}$	3.69141	14.5657
0.018	2.56103	2.41683	$\times 10^{-3}$	3.69141	14.5657
0.022	2.68555	2.53434	$\times 10^{-3}$	3.69141	14.5657
0.026	2.76123	2.60576	$\times 10^{-3}$	3.69141	14.5657
0.032	2.87353	2.71173	$\times 10^{-3}$	3.69141	14.5657
0.038	2.96410	2.79720	$\times 10^{-3}$	3.68897	14.5560
0.046	3.07617	2.90296	$\times 10^{-3}$	3.69141	14.5657
0.056	3.16406	2.98590	$\times 10^{-3}$	3.69385	14.5753
0.068	3.26172	3.07806	$\times 10^{-3}$	3.69141	14.5657
0.083	3.36670	3.17713	$\times 10^{-3}$	3.68897	14.5560
0.100	3.43994	3.24625	$\times 10^{-3}$	3.68897	14.5560
0.121	3.55957	3.35914	$\times 10^{-3}$	3.69141	14.5657
0.147	3.65234	3.44669	$\times 10^{-3}$	3.68897	14.5560
0.178	3.74756	3.53655	$\times 10^{-3}$	3.69385	14.5753
0.215	3.83789	3.62179	$\times 10^{-3}$	3.69141	14.5657
0.261	3.93310	3.71164	$\times 10^{-3}$	3.69141	14.5657
0.316	4.03320	3.80611	$\times 10^{-3}$	3.69141	14.5657
0.383	4.11621	3.88444	$\times 10^{-3}$	3.69141	14.5657
0.464	4.20654	3.96969	$\times 10^{-3}$	3.68897	14.5560
0.562	4.29688	4.05494	$\times 10^{-3}$	3.68897	14.5560
0.681	4.38477	4.13788	$\times 10^{-3}$	3.69141	14.5657
0.825	4.46045	4.20930	$\times 10^{-3}$	3.69141	14.5657
1.000	4.53125	4.27611	$\times 10^{-3}$	3.68897	14.5560

５．３ 測定結果より熱伝導率の算出

（１） $\dfrac{dR}{dT}$ の算出

５．１節・測定１，測定２の（１），（２）で測定した，恒温槽温度と加熱細線抵抗の値を用いて，抵抗 R の温度 T に対する変化（ dR/dT ）を調べる．

測定結果より，恒温槽温度 T[K]と加熱細線抵抗 R_0[Ω]は，表３の通りである．

表３　恒温槽温度と加熱細線温度の測定値

	恒温槽温度 T [K]	加熱細線抵抗 R_0 [Ω]
測定1	296.1	181.58
測定2	328.5	199.96

抵抗 R を温度 T で微分した値を差分で求めると，変化の割合は，

$$\frac{dR}{dT} = \frac{R_{02} - R_{01}}{T_2 - T_1} = \frac{328.5 - 296.1}{199.96 - 181.58} = 0.5671 \quad [\Omega/\mathrm{K}]$$

である．図５（p.13）に，この傾きを示したグラフを示す．

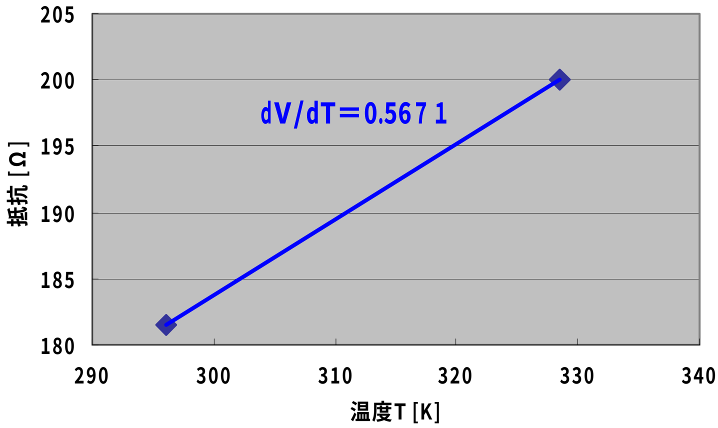

図５　細線抵抗R－温度Tのグラフ

（２） $\dfrac{dV}{d\ln t}$ の算出と ln(t)―V グラフ

＜測定１＞

５．１節（３）で測定した不平衡電位差 V[V]と時間 t [s]より，V と ln(t)を表にまとめたものを表４（p.14）に示す．ここで， ln(t)と V が一次比例すると仮定すると，ln(t)と V は次式のように書ける．

$$V = a\ln t + b \qquad \text{（a,b は定数）} \qquad ――― (17)$$

ところで， $y = ax + b$ において，最小二乗法で近似直線を求める際，a,b は次式で求められる．

$$a = \frac{n\sum xy - \sum x \sum y}{n\sum x^2 - \left(\sum x\right)^2} \qquad ――― (18)$$

$$b = \frac{\sum x^2 \sum y - \sum x \sum xy}{n\sum x^2 - \left(\sum x\right)^2} \qquad ――― (19)$$

ただし，ｎは測定値の個数である．

したがって，式(18),(19)より a,b は次の式で求められる．

$$a = \frac{n\sum V\ln t - \sum \ln t \sum V}{n\sum (\ln t)^2 - \left(\sum \ln t\right)^2} \qquad ――― (18)'$$

$$b = \frac{\sum (\ln t)^2 \sum V - \sum \ln t \sum V\ln t}{n\sum (\ln t)^2 - \left(\sum \ln t\right)^2} \qquad ――― (19)'$$

表４に加えて $(\ln t)^2$ と， $V\ln t$ を示しておく．

表４の値より a,b の値は次の通りである．

$$(18)' \Leftrightarrow \quad a = \frac{n\sum V\ln t - \sum \ln t \sum V}{n\sum(\ln t)^2 - \left(\sum \ln t\right)^2}$$

$$= \frac{25 \times -135.167932 \times 10^{-3} + 57.5330 \times 67.76606 \times 10^{-3}}{25 \times 180.1243577 - (-57.5330)^2}$$

$$= 4.35506 \times 10^{-4} \quad [\mathrm{V}]$$

$$(19)' \Leftrightarrow \quad b = \frac{\sum(\ln t)^2 \sum V - \sum \ln t \sum V\ln t}{n\sum(\ln t)^2 - \left(\sum \ln t\right)^2}$$

$$= \frac{180.1243577 \times 67.76606 \times 10^{-3} - 57.5330 \times 135.167932 \times 10^{-3}}{25 \times 180.1243577 - (-57.5330)^2}$$

$$= 3.71288 \times 10^{-3} \quad [\mathrm{V}]$$

よって、 $V = 4.355 \times 10^{-4} \ln t + 3.713 \times 10^{-3}$ [V] ———（20）

式(20)をグラフにしたものを図６（p.15）に示す.

表４　不平衡電位差Ｖと ln(t)

時間 t [s]	不平衡電位差V [V]		ln(t)	(ln(t))^2	V*ln(t) [V]	
0.010	1.71182	$\times 10^{-3}$	-4.605170186	21.20759244	-7.883234459	$\times 10^{-3}$
0.012	1.78325	$\times 10^{-3}$	-4.422848629	19.56159	-7.887048304	$\times 10^{-3}$
0.015	1.88232	$\times 10^{-3}$	-4.199705078	17.63752274	-7.905187822	$\times 10^{-3}$
0.018	1.96066	$\times 10^{-3}$	-4.017383521	16.13937036	-7.876706164	$\times 10^{-3}$
0.022	2.05050	$\times 10^{-3}$	-3.816712826	14.56729679	-7.826188131	$\times 10^{-3}$
0.026	2.11962	$\times 10^{-3}$	-3.649658741	13.32000893	-7.735893195	$\times 10^{-3}$
0.032	2.21408	$\times 10^{-3}$	-3.442019376	11.84749739	-7.620922463	$\times 10^{-3}$
0.038	2.29012	$\times 10^{-3}$	-3.270169119	10.69400607	-7.489073517	$\times 10^{-3}$
0.046	2.37536	$\times 10^{-3}$	-3.079113882	9.480942301	-7.314010	$\times 10^{-3}$
0.056	2.46061	$\times 10^{-3}$	-2.88240	8.308250446	-7.092459018	$\times 10^{-3}$
0.068	2.54124	$\times 10^{-3}$	-2.688247574	7.226675018	-6.831494192	$\times 10^{-3}$
0.083	2.62649	$\times 10^{-3}$	-2.488914671	6.19469624	-6.537105234	$\times 10^{-3}$
0.100	2.70252	$\times 10^{-3}$	-2.302585093	5.30189811	-6.222786155	$\times 10^{-3}$
0.121	2.79699	$\times 10^{-3}$	-2.111964733	4.460395035	-5.907134584	$\times 10^{-3}$
0.147	2.88223	$\times 10^{-3}$	-1.917322692	3.676126306	-5.526163601	$\times 10^{-3}$
0.178	2.96287	$\times 10^{-3}$	-1.725971729	2.978978408	-5.113826241	$\times 10^{-3}$
0.215	3.04811	$\times 10^{-3}$	-1.537117251	2.362729443	-4.685305164	$\times 10^{-3}$
0.261	3.12875	$\times 10^{-3}$	-1.343234872	1.80427992	-4.202646619	$\times 10^{-3}$
0.316	3.21169	$\times 10^{-3}$	-1.152013065	1.327134103	-3.69991071	$\times 10^{-3}$
0.383	3.29463	$\times 10^{-3}$	-0.95972029	0.921063035	-3.161926004	$\times 10^{-3}$
0.464	3.37527	$\times 10^{-3}$	-0.767870727	0.589625453	-2.591772169	$\times 10^{-3}$
0.562	3.46282	$\times 10^{-3}$	-0.576253429	0.332068015	-1.995460718	$\times 10^{-3}$
0.681	3.54807	$\times 10^{-3}$	-0.384192973	0.14760424	-1.363144037	$\times 10^{-3}$
0.825	3.63101	$\times 10^{-3}$	-0.192371893	0.037006945	-0.698504743	$\times 10^{-3}$
1.000	3.70704	$\times 10^{-3}$	0	0	0	$\times 10^{-3}$
合計	67.76808	$\times 10^{-3}$	-57.5330	180.1243577	-135.1679032	$\times 10^{-3}$

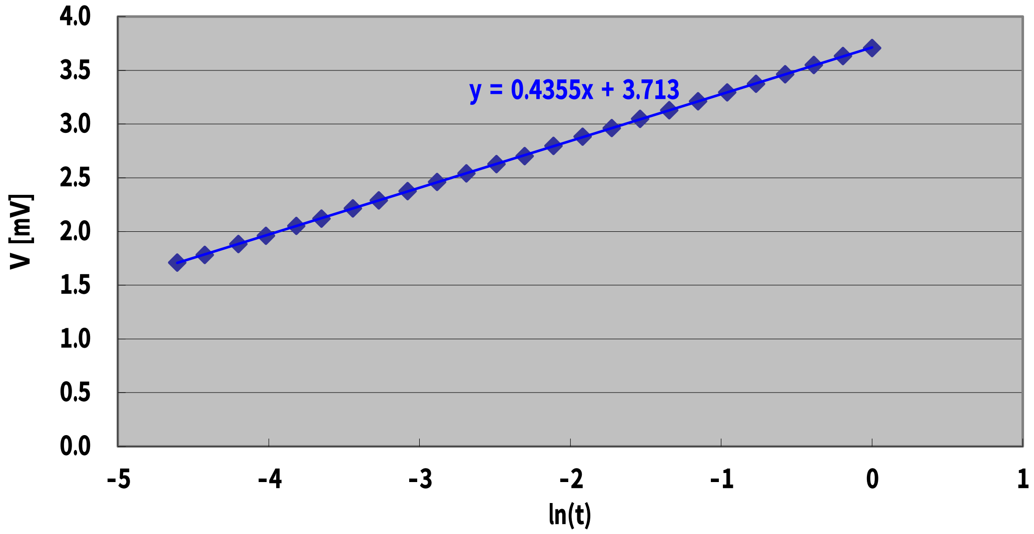

図6　測定1におけるln(t)-Vグラフ

式(20)より，$\dfrac{dV}{d\ln t} = 4.355\times10^{-4}$　[V]

＜測定２＞

測定１と同様に$\dfrac{dV}{d\ln t}$を求める．

式(17)において，a,b の値は表５（p.16）より，

(18)'⇔ $a = \dfrac{n\sum V\ln t - \sum \ln t \sum V}{n\sum(\ln t)^2 - \left(\sum \ln t\right)^2}$

$$= \frac{25\times -164.16182\times10^{-3} + 57.5330\times81.13113\times10^{-3}}{25\times180.1243577 - (-57.5330)^2}$$

$= 4.725\times10^{-4}$　[V]

(19)'⇔ $b = \dfrac{\sum(\ln t)^2 \sum V - \sum \ln t \sum V\ln t}{n\sum(\ln t)^2 - \left(\sum \ln t\right)^2}$

$$= \frac{180.1243577\times81.13113\times10^{-3} - 57.5330\times164.16182\times10^{-3}}{25\times180.1243577 - (-57.5330)^2}$$

$= 4.333\times10^{-3}$　[V]

$\therefore V = 4.725\times10^{-4}\ln t + 4.333\times10^{-3}$　[V]　　　―――（21）

したがって、$\dfrac{dV}{d\ln t} = 4.725\times10^{-4}$

表５　負抵抗電位差 V と ln(t)

時間 t [s]	不平衡電位差V [V]	ln(t)	$(\ln(t))^2$	V*ln(t) [V]
0.010	2.12654 $\times10^{-3}$	-4.605170186	21.20759244	-9.793070517 $\times10^{-3}$
0.012	2.21639 $\times10^{-3}$	-4.422848629	19.56159	-9.802745619 $\times10^{-3}$
0.015	2.31776 $\times10^{-3}$	-4.199705078	17.63752274	-9.733903806 $\times10^{-3}$
0.018	2.41683 $\times10^{-3}$	-4.017383521	16.13937036	-9.70932442 $\times10^{-3}$
0.022	2.53434 $\times10^{-3}$	-3.816712826	14.56729679	-9.672835002 $\times10^{-3}$
0.026	2.60576 $\times10^{-3}$	-3.649658741	13.32000893	-9.510117746 $\times10^{-3}$
0.032	2.71173 $\times10^{-3}$	-3.442019376	11.84749739	-9.333834568 $\times10^{-3}$
0.038	2.79720 $\times10^{-3}$	-3.270169119	10.69400607	-9.147325162 $\times10^{-3}$
0.046	2.90296 $\times10^{-3}$	-3.079113882	9.480942301	-8.938551 $\times10^{-3}$
0.056	2.98590 $\times10^{-3}$	-2.88240	8.308250446	-8.606578872 $\times10^{-3}$
0.068	3.07806 $\times10^{-3}$	-2.688247574	7.226675018	-8.274599678 $\times10^{-3}$
0.083	3.17713 $\times10^{-3}$	-2.488914671	6.19469624	-7.907614326 $\times10^{-3}$
0.100	3.24625 $\times10^{-3}$	-2.302585093	5.30189811	-7.474766132 $\times10^{-3}$
0.121	3.35914 $\times10^{-3}$	-2.111964733	4.460395035	-7.094393158 $\times10^{-3}$
0.147	3.44669 $\times10^{-3}$	-1.917322692	3.676126306	-6.608417382 $\times10^{-3}$
0.178	3.53655 $\times10^{-3}$	-1.725971729	2.978978408	-6.10398314 $\times10^{-3}$
0.215	3.62179 $\times10^{-3}$	-1.537117251	2.362729443	-5.567119869 $\times10^{-3}$
0.261	3.71164 $\times10^{-3}$	-1.343234872	1.80427992	-4.985606518 $\times10^{-3}$
0.316	3.80611 $\times10^{-3}$	-1.152013065	1.327134103	-4.384683155 $\times10^{-3}$
0.383	3.88444 $\times10^{-3}$	-0.95972029	0.921063035	-3.727977244 $\times10^{-3}$
0.464	3.96969 $\times10^{-3}$	-0.767870727	0.589625453	-3.048205113 $\times10^{-3}$
0.562	4.05494 $\times10^{-3}$	-0.576253429	0.332068015	-2.336672249 $\times10^{-3}$
0.681	4.13788 $\times10^{-3}$	-0.384192973	0.14760424	-1.589744341 $\times10^{-3}$
0.825	4.20930 $\times10^{-3}$	-0.192371893	0.037006945	-0.809750726 $\times10^{-3}$
1.000	4.27611 $\times10^{-3}$	0	0	0 $\times10^{-3}$
合計	81.13113 $\times10^{-3}$	-57.5330	180.1243577	-164.16182 $\times10^{-3}$

式(21)をグラフにしたものを図７に示す.

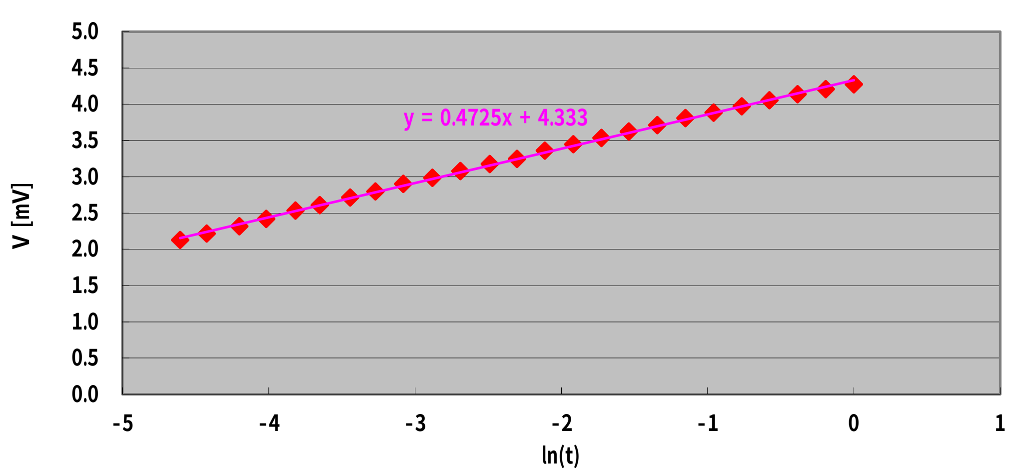

図7　測定2におけるln(t)-Vグラフ

（３） 熱伝導率λの算出

（1),（2）および５．１節の＜測定１＞の結果より，以上の表６のパラメータの値が得られた.

表６　測定１の R₀，S，E，l，dR/dT，dV/dlnt の値

加熱線抵抗 R_0	181.58　[Ω]
ブリッジ抵抗 S	2005.7　[Ω]
ブリッジ電圧 E	14.5676　[V]
細線長さ l	0.04090　[m]
dR/dT	0.5671　[Ω/K]
dV/dlnt	4.355×10^{-4}　[V]

表６の値を式(15)に代入すると熱伝導率λが得られる.

$$(15)\Leftrightarrow \lambda_1=\frac{R_0SE^3}{4\pi l(R_0+S)^4}\cdot\frac{dR}{dT}\bigg/\frac{dV}{d\ln t}$$

$$=\frac{181.58\times2005.7\times14.5676^3}{4\times\pi\times0.04090\times(181.58+2005.7)^4}\cdot\frac{0.5671}{4.355\times10^{-4}}$$

$$=0.1246\quad[W/(m\cdot K)]$$

同様に測定２では，表７のパラメーターとなり，これを式(15)に代入すると次のようになる.

$$(15)\Leftrightarrow \lambda_2=\frac{R_0SE^3}{4\pi l(R_0+S)^4}\cdot\frac{dR}{dT}\bigg/\frac{dV}{d\ln t}$$

$$=\frac{199.96\times2003.9\times14.5641^3}{4\times\pi\times0.04090\times(199.96+2003.9)^4}\cdot\frac{0.5671}{4.725\times10^{-4}}$$

$$=0.1225\quad[W/(m\cdot K)]$$

表７　測定２の R_0，S，E，l，dR/dT，dV/dlnt の値

加熱線抵抗 R_0	199.96　[Ω]
ブリッジ抵抗 S	2003.9　[Ω]
ブリッジ電圧 E	14.5641　[V]
細線長さ l	0.04090　[m]
dR/dT	0.5671　[Ω/K]
dV/dlnt	4.725×10^{-4}　[V]

以上（３）より，恒温槽温度Ｔと熱伝導率λの関係は表８のようになる.

表８　恒温槽温度Ｔと熱伝導率λ

	恒温槽温度 T [K]	熱伝導率 λ [W/(m·K)]
測定1	296.1	0.1246
測定2	328.5	0.1225

６．　不確かさの検討

あらゆる計測データには誤差が含まれている．ここで，誤差とは測定値から真の値を引いた差である.その誤差δは一定の偏り誤差βと測定ごとにばらつく偶然誤差εから成り立っている．すなわち，

$$\delta = \beta + \varepsilon$$

である．ところで，我々が行う計測ではほとんどの場合で真値が未知であり，δを直接求めることは不可能である．従って，誤差は推定せざるを得ず，推定ゆえにその値は誤差とは言わず,不確かさという.不確かさ解析はどの実験でも必ず行わなければならない.ここでは,熱伝導率の測定に伴う不確かさ解析を行うため,まず誤差要因の各要素誤差の推定をする必要がある．表９に各測定パラメータの正確度および精密度を示す．これらから，λに対する総括正確度および総括精密度を誤差伝播側に基づき算出する．

表９　正確度 B_i および精密度 S_i の値

No.	パラメータ	B_i	S_i
1	R_0	0.15 Ω	0.26 Ω
2	S	0.15 Ω	0.26 Ω
3	E	0.003 V	0.007 V
4	l	0.05 mm	0.10 mm
5	dR/dT	0.001 Ω/K	0.002 Ω/K
6	$dV/d\ln t$	0.15 μV	0.31 μV

（１）　不確かさの計算式

不確かさ区間の計算は次式で求められる．

$$\lambda_{rRss} = \sqrt{{B_r}^2 + (tS_r)^2} \qquad ―――（22）$$

この式は約 95%の包括度を持つ．ここでｔはスチューデントのｔであり，今回はｔ＝2 とする．また，B_r は総括正確度，S_r は総括精密度である．

総括正確度 B_r および総括精密度 S_r は，次式で求められる．

$$B_r = \sqrt{\sum_i^T (\theta_i \cdot B_i)^2} \qquad ―――（23）$$

$$S_r = \sqrt{\sum_i^T (\theta_i \cdot S_i)^2} \qquad ―――（24）$$

ここで T はパラメータの数であり,今回の実験では表 10 にも示したとおり $T = 6$ である.

また θ_i は感度係数であり，次式で表される．

$$\theta_i = \frac{\partial \lambda}{\partial P_i} \qquad （P_i：各パラメータ） \qquad ―――（25）$$

ただし，R_0，S についてはλに関する偏微分が困難なため次式を用いて算出する．

$$\theta_i = \frac{\partial \lambda}{\partial P_i} = \left[\lambda(P_i + \varDelta P_i) - \lambda(P_i - \varDelta P_i)\right] / 2\varDelta P_i \qquad ―――（26）$$

（２） 感度θ_i

式(25), (26)を用いて各パラメータの感度を求める.

ここで各パラメータに代入する数値は表６，表７および表９（p.18）の値である.

＜測定１＞

$$\theta_{R_0}=\left\{\frac{\left(R_0+S_{\overline{R_0}}\right)SE^3}{4\pi l\left[\left(R_0+S_{\overline{R_0}}\right)+S\right]^4}\cdot\frac{dR}{dT}\bigg/\frac{dV}{d\ln t}-\frac{\left(R_0-S_{\overline{R_0}}\right)SE^3}{4\pi l\left[\left(R_0+S_{\overline{R_0}}\right)+S\right]^4}\cdot\frac{dR}{dT}\bigg/\frac{dV}{d\ln t}\right\}\bigg/2S_{\overline{R_0}}$$

$$=\left\{\frac{(181.58+0.26)\times2005.7\times14.5676^3}{4\times\pi\times0.04090\times[(181.58+0.26)+2005.7]^4}\cdot\frac{0.5671}{4.355\times10^{-4}}\right.$$

$$\left.-\frac{(181.58-0.26)\times2005.7\times14.5676^3}{4\times\pi\times0.04090\times[(181.58-0.26)+2005.7]^4}\cdot\frac{0.5671}{4.355\times10^{-4}}\right\}\times\frac{1}{2\times0.26}$$

＝4.584×10^{-4}　[W/(ΩmK)]

$$\theta_S=\left\{\frac{R_0\left(S+S_{\overline{S}}\right)E^3}{4\pi l\left[R_0+\left(S+S_{\overline{S}}\right)\right]^4}\cdot\frac{dR}{dT}\bigg/\frac{dV}{d\ln t}-\frac{R_0\left(S-S_{\overline{S}}\right)E^3}{4\pi l\left[R_0+\left(S+S_{\overline{S}}\right)\right]^4}\cdot\frac{dR}{dT}\bigg/\frac{dV}{d\ln t}\right\}\bigg/2S_{\overline{S}}$$

$$=\left\{\frac{181.58\times(2005.7+0.26)\times14.5676^3}{4\times\pi\times0.04090\times[181.58+(2005.7+0.26)]^4}\cdot\frac{0.5671}{4.355\times10^{-4}}\right.$$

$$\left.-\frac{181.58\times(2005.7-0.26)\times14.5676^3}{4\times\pi\times0.04090\times[181.58+(2005.7-0.26)]^4}\cdot\frac{0.5671}{4.355\times10^{-4}}\right\}\times\frac{1}{2\times0.26}$$

＝-1.657×10^{-4}　[W/(ΩmK)]

$$\theta_E=\frac{\partial\lambda}{\partial E}=\frac{3R_0SE^2}{4\pi l(R_0+S)^4}\cdot\frac{dR}{dT}\bigg/\frac{dV}{d\ln t}$$

$$=\frac{3\times181.58\times2005.7\times14.5676^2}{4\times\pi\times0.04090\times(181.58+2005.7)^4}\cdot\frac{0.5671}{4.355\times10^{-4}}$$

＝0.02565　[W/(VmK)]

$$\theta_l=\frac{\partial\lambda}{\partial l}=-\frac{R_0SE^3}{4\pi l^2(R_0+S)^4}\cdot\frac{dR}{dT}\bigg/\frac{dV}{d\ln t}$$

$$=-\frac{181.58\times2005.7\times14.5676^3}{4\times\pi\times0.04090^2\times(181.58+2005.7)^4}\cdot\frac{0.5671}{4.355\times10^{-4}}$$

＝－3.046　[W/(m^2K)]

$$\theta_{\frac{dR}{dT}}=\frac{\partial\lambda}{\partial(dR/dT)}=\frac{R_0SE^3}{4\pi l(R_0+S)^4}\cdot1\bigg/\frac{dV}{d\ln t}$$

$$=\frac{181.58\times2005.7\times14.5676^3}{4\times\pi\times0.04090\times(181.58+2005.7)^4}\cdot\frac{1}{4.355\times10^{-4}}$$

＝0.2197　[W/(Ωm)]

$$\theta_{\frac{dV}{d\ln t}} = \frac{\partial \lambda}{\partial (dV/d\ln t)} = -\frac{R_0 S E^3}{4\pi l (R_0+S)^4} \cdot \frac{dR}{dT} \Bigg/ \left(\frac{dV}{d\ln t}\right)^2$$

$$= -\frac{181.58\times 2005.7\times 14.5676^3}{4\times\pi\times 0.04090\times(181.58+2005.7)^4} \cdot \frac{0.5671}{(4.355\times 10^{-4})^2}$$

＝－286.0　[W/(VmK)]

＜測定２＞

$$\theta_{R_0} = \left\{ \frac{(R_0 + S_{\overline{R_0}}) S E^3}{4\pi l [(R_0 + S_{\overline{R_0}}) + S]^4} \cdot \frac{dR}{dT} \Bigg/ \frac{dV}{d\ln t} - \frac{(R_0 - S_{\overline{R_0}}) S E^3}{4\pi l [(R_0 + S_{\overline{R_0}}) + S]^4} \cdot \frac{dR}{dT} \Bigg/ \frac{dV}{d\ln t} \right\} \Bigg/ 2S_{\overline{R_0}}$$

$$= \left\{ \frac{(199.96+0.26)\times 2003.9\times 14.5641^3}{4\times\pi\times 0.04090\times[(199.96+0.26)+2003.9]^4} \cdot \frac{0.5671}{4.725\times 10^{-4}} \right.$$

$$\left. - \frac{(199.96-0.26)\times 2003.9\times 14.5641^3}{4\times\pi\times 0.04090\times[(199.96-0.26)+2003.9]^4} \cdot \frac{0.5671}{4.725\times 10^{-4}} \right\} \times \frac{1}{2\times 0.26}$$

＝3.904×10－4　[W/(ΩmK)]

$$\theta_S = \left\{ \frac{R_0 (S + S_{\overline{S}}) E^3}{4\pi l [R_0 + (S + S_{\overline{S}})]^4} \cdot \frac{dR}{dT} \Bigg/ \frac{dV}{d\ln t} - \frac{R_0 (S - S_{\overline{S}}) E^3}{4\pi l [R_0 + (S + S_{\overline{S}})]^4} \cdot \frac{dR}{dT} \Bigg/ \frac{dV}{d\ln t} \right\} \Bigg/ 2S_{\overline{S}}$$

$$= \left\{ \frac{199.96\times(2003.9+0.26)\times 14.5641^3}{4\times\pi\times 0.04090\times[199.96+(2003.9+0.26)]^4} \cdot \frac{0.5671}{4.725\times 10^{-4}} \right.$$

$$\left. - \frac{199.96\times(2003.9-0.26)\times 14.5641^3}{4\times\pi\times 0.04090\times[199.96+(2003.9-0.26)]^4} \cdot \frac{0.5671}{4.725\times 10^{-4}} \right\} \times \frac{1}{2\times 0.26}$$

＝-1.613×10－4　[W/(ΩmK)]

$$\theta_E = \frac{\partial \lambda}{\partial E} = \frac{3 R_0 S E^2}{4\pi l (R_0+S)^4} \cdot \frac{dR}{dT} \Bigg/ \frac{dV}{d\ln t}$$

$$= \frac{3\times 199.96\times 2003.9\times 14.5641^2}{4\times\pi\times 0.04090\times(199.96+2003.9)^4} \cdot \frac{0.5671}{4.725\times 10^{-4}}$$

＝0.02524　[W/(VmK)]

$$\theta_l = \frac{\partial \lambda}{\partial l} = -\frac{R_0 S E^3}{4\pi l^2 (R_0+S)^4} \cdot \frac{dR}{dT} \Bigg/ \frac{dV}{d\ln t}$$

$$= -\frac{199.96\times 2003.9\times 14.5641^3}{4\times\pi\times 0.04090^2\times(199.96+2003.9)^4} \cdot \frac{0.5671}{4.725\times 10^{-4}}$$

＝－2.996　[W/(m²K)]

$$\theta_{\frac{dR}{dT}} = \frac{\partial \lambda}{\partial (dR/dT)} = \frac{R_0 S E^3}{4\pi l (R_0 + S)^4} \cdot 1 \Big/ \frac{dV}{d \ln t}$$

$$= \frac{199.96 \times 2003.9 \times 14.5641^3}{4 \times \pi \times 0.04090 \times (199.96 + 2003.9)^4} \cdot \frac{1}{4.725 \times 10^{-4}}$$

＝0.2161　[W/(Ωm)]

$$\theta_{\frac{dV}{d \ln t}} = \frac{\partial \lambda}{\partial (dV/d \ln t)} = -\frac{R_0 S E^3}{4\pi l (R_0 + S)^4} \cdot \frac{dR}{dT} \Big/ \left(\frac{dV}{d \ln t} \right)^2$$

$$= -\frac{199.96 \times 2003.9 \times 14.5641^3}{4 \times \pi \times 0.04090 \times (199.96 + 2003.9)^4} \cdot \frac{0.5671}{(4.725 \times 10^{-4})^2}$$

＝－259.3　[W/(VmK)]

以上，感度θをまとめると，表 10 のとおりである.

表 10　感度θ

	測定１	測定２
θ_1	4.584×10⁻⁴　[W/(ΩmK)]	3.904×10⁻⁴　[W/(ΩmK)]
θ_2	-1.657×10⁻⁴　[W/(ΩmK)]	-1.613×10⁻⁴　[W/(ΩmK)]
θ_3	0.02565　[W/(VmK)]	0.02524　[W/(VmK)]
θ_4	－3.046　[W/(m²K)]	－2.996　[W/(m²K)]
θ_5	0.2197　[W/(Ωm)]	0.2161　[W/(Ωm)]
θ_6	－286.0　[W/(VmK)]	－259.3　[W/(VmK)]

（３）　総括正確度 B_r ・総括精密度 S_r

式(23),(24)を用いて，総括正確度 B_r および総括精密度 S_r を求める.

これらを求めるにあたって，表 10 の値を使って，**$(\theta_i B_i)^2$**を準備として求める．求めた結果を表 11 に示す.

表 11　総括正確度 B_r および総括精密度 S_r を求める準備

i	$(\theta_i B_i)^2$ [W²/(m²·K²)]		$(\theta_i S_i)^2$ [W²/(m²·K²)]	
	測定1	測定2	測定1	測定2
1	47.27938 ×10⁻¹⁰	34.29274 ×10⁻¹⁰	14.20483 ×10⁻⁹	10.30306 ×10⁻⁹
2	6.17771 ×10⁻¹⁰	5.85398 ×10⁻¹⁰	1.856059 ×10⁻⁹	1.758796 ×10⁻⁹
3	59.21303 ×10⁻¹⁰	57.33518 ×10⁻¹⁰	32.2382 ×10⁻⁹	31.21582 ×10⁻⁹
4	231.9529 ×10⁻¹⁰	224.4004 ×10⁻¹⁰	92.78116 ×10⁻⁹	89.76016 ×10⁻⁹
5	482.6809 ×10⁻¹⁰	466.9921 ×10⁻¹⁰	193.0724 ×10⁻⁹	186.7968 ×10⁻⁹
6	18.4041 ×10⁻¹⁰	15.12821 ×10⁻¹⁰	7.860596 ×10⁻⁹	6.461427 ×10⁻⁹
合計	845.708 ×10⁻¹⁰	804.0026 ×10⁻¹⁰	342.0132 ×10⁻⁹	326.2961 ×10⁻⁹

表 11 の値を式(23),(24)に代入すれば，総括正確度 B_r および総括精密度 S_r が求まる．

$$(23) \Leftrightarrow B_{r1} = \sqrt{\sum_i^T (\theta_i \cdot B_i)^2} = \sqrt{845.7\times10^{-10}} = 2.908\times10^{-4} \quad [\mathrm{W/(m\cdot K)}]$$

$$B_{r2} = \sqrt{\sum_i^T (\theta_i \cdot B_i)^2} = \sqrt{804.0\times10^{-10}} = 2.835\times10^{-4} \quad [\mathrm{W/(m\cdot K)}]$$

$$(24) \Leftrightarrow S_{r1} = \sqrt{\sum_i^T (\theta_i \cdot S_i)^2} = \sqrt{342.0\times10^{-9}} = 5.848\times10^{-4} \quad [\mathrm{W/(m\cdot K)}]$$

$$S_{r2} = \sqrt{\sum_i^T (\theta_i \cdot S_i)^2} = \sqrt{326.3\times10^{-9}} = 5.712\times10^{-4} \quad [\mathrm{W/(m\cdot K)}]$$

（４） 不確かさ

以上より，不確かさ区間 λ_{rRSS} は式(22)より，

$$(22) \Leftrightarrow \lambda_{rRss} = \sqrt{{B_r}^2 + (tS_r)^2}$$

$$\lambda_{rRss1} = \sqrt{{B_{r1}}^2 + (tS_{r1})^2} = \sqrt{845.7\times10^{-10} + 2^2\times342.0\times10^{-9}}$$
$$= 1.205\times10^{-3} \quad [\mathrm{W/(m\cdot K)}]$$

$$\lambda_{rRss2} = \sqrt{{B_{r2}}^2 + (tS_{r2})^2} = \sqrt{804.0\times10^{-10} + 2^2\times326.3\times10^{-9}}$$
$$= 1.177\times10^{-3} \quad [\mathrm{W/(m\cdot K)}]$$

（５） グラフの作成

先ほどの（４）で得られた不確かさ結果と，５．３節（3）で得た伝熱係数λおよび以下に示す文献値[1)]とを比較するため，グラフを作成する．

表 12 に文献値で得たスピンドル油の熱伝導率λの値を，そして測定で得られたλの値および不確かさを図８に示す．

表９　文献値で得たスピンドル油の熱伝導率λ

温度 T[K]	熱伝導率λ[W/(m･K)]
300	0.144
320	0.143
340	0.142
360	0.140
380	0.139
400	0.138

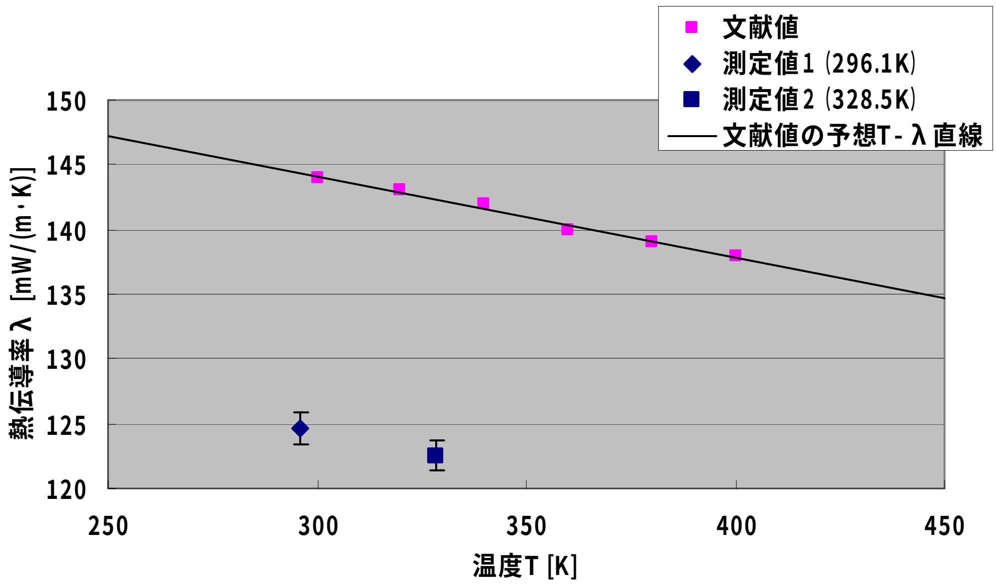

図8　熱伝導率の文献値と測定値の比較

7.　検討・考察

結果として，測定で得られた熱伝導率λの不確かさと有効数字を考慮した値は，

$$\lambda_{T=296[K]} = 125 \pm 1 \quad [\mathrm{mW/(m \cdot K)}], \qquad \lambda_{T=329[K]} = 123 \pm 1 \quad [\mathrm{mW/(m \cdot K)}]$$

となった．これに対し，文献値[1)]で得たスピンドル油の熱伝導率λの値は表9（p.22）にもあるように 300K でλ＝144[mW/(m・K)]，320K でλ＝143[mW/(m・K)]であり，

$$\begin{cases} \dfrac{144-125}{144} \times 100 = 13.2 \quad [\%] \\ \dfrac{142.5-123}{142.5} \times 100 = 13.7 \quad [\%] \end{cases}$$

と，13%以上の値のズレがある．それに対して不確かさでは，

$$\begin{cases} \dfrac{\lambda_{rRSS1}}{\lambda_1} \times 100 = 0.967 \quad [\%] \\ \dfrac{\lambda_{rRSS2}}{\lambda_2} \times 100 = 0.958 \quad [\%] \end{cases}$$

と，ともに１%未満である．したがって何らかの測定の誤りがあった可能性が高い．したがって，測定値について検討をしてみる．

まず，加熱細線抵抗値について検討してみる．

今回の実験では R_0 の測定はそれぞれ一回ずつであった．また実験中 R_0 を測定する際，数値が変動して測定に支障をきたしたことを考えると，この R_0 の測定値は誤差をもたらす要因になることが十分に考えられる．

例えば，ある測定を複数回行ったとする．各測定値 x_i の平均値 $\bar{x}$ はどのような誤差を持つのであろうか．ｎ組の測定によって得られたｎ個の平均値を考えると，やはり誤差を含んで真の値のまわりに分布している．しかし平均値は各測定値よりも真の値に近くなっていることを考えると，平均値は各測定値より狭い範囲に分布することが容易に想像できる．実際に平均値のもつ平均誤差ｓｎは，

$$s_n = \sqrt{\frac{1}{n(n-1)}\sum_{i=1}^{n}\left(x_i - \bar{x}\right)^2} = \frac{1}{\sqrt{n}}s \qquad ―――（27）$$

となることが知られている．例えば５回測定の平均分布を考えると，図９[2] に示すように，平均値の誤差分布の変曲点 s_n は $s/\sqrt{5}$ となり，各誤差曲線に比べ鋭くなる．式(27)からも分かるとおり，平均値の平均誤差 s_n は s に対して $1/\sqrt{n}$ の割合で減少していく．その様子を図10[2] に示す．図 10 を見てもわかるとおり，測定値の平均誤差ｓに対して平均値の平均誤差 s_n は最初の回数の測定によって急速に減少し，約 10 回以上の測定回数では減り方が緩やかになる．このように，平均値の平均誤差 s_n は式(27)で求めることができ，測定は 10 回程度行うことが効果的であることがわかる．

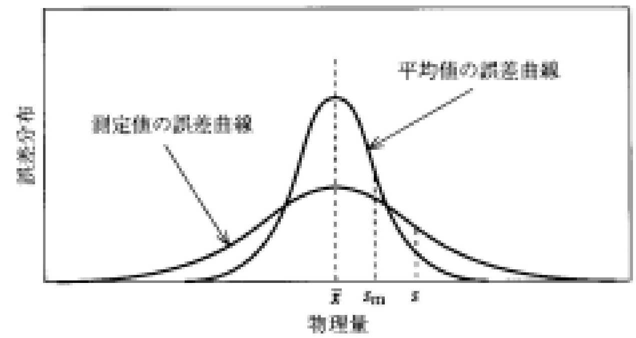

図９　測定値と平均値の誤差分布の比較 [2]

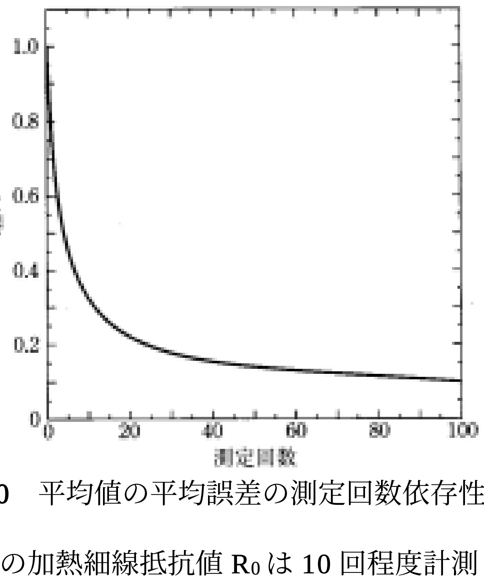

図 10　平均値の平均誤差の測定回数依存性 [2]

したがって，今回の測定の加熱細線抵抗値 R_0 は 10 回程度計測し，その平均値を R_0 として測定を行うべきではなかったのではないかと考える．

ところで，今回使用した使用した加熱細線はタングステン線である．タングステンの物理特性値 [3] の電気抵抗率は 293[K]で 5.55[μΩ・cm]，300[K]で 5.65[μΩ・cm]，400[K]で 8.00[μΩ・cm]である．

したがって，これらの値を用いて dR/dT を求めると，

$$R_{T=293K} = 5.55\times10^{-6}\times4.090\bigg/\left(\frac{5\times10^{-4}}{2}\right)^2\pi = 116 \quad [\Omega]$$

$$R_{T=300K} = 5.65\times10^{-6}\times4.090\bigg/\left(\frac{5\times10^{-4}}{2}\right)^2\pi = 118 \quad [\Omega]$$

$$R_{T=400K} = 8.00\times10^{-6}\times4.090\bigg/\left(\frac{5\times10^{-4}}{2}\right)^2\pi = 167 \quad [\Omega]$$

$$\therefore \quad \left(\frac{dR}{dT}\right)_1 = \frac{\varDelta R}{\varDelta T} = \frac{118-116}{300-293} = 0.304 \quad [\Omega/\mathrm{K}]$$

$$\left(\frac{dR}{dT}\right)_2 = \frac{\varDelta R}{\varDelta T} = \frac{167-118}{400-300} = 0.490 \quad [\Omega/\mathrm{K}]$$

これらより次図のように R-T 直線を示した図 11 が得られる．ここで，比較のために図５で得た測定値のグラフも付け加えておく．

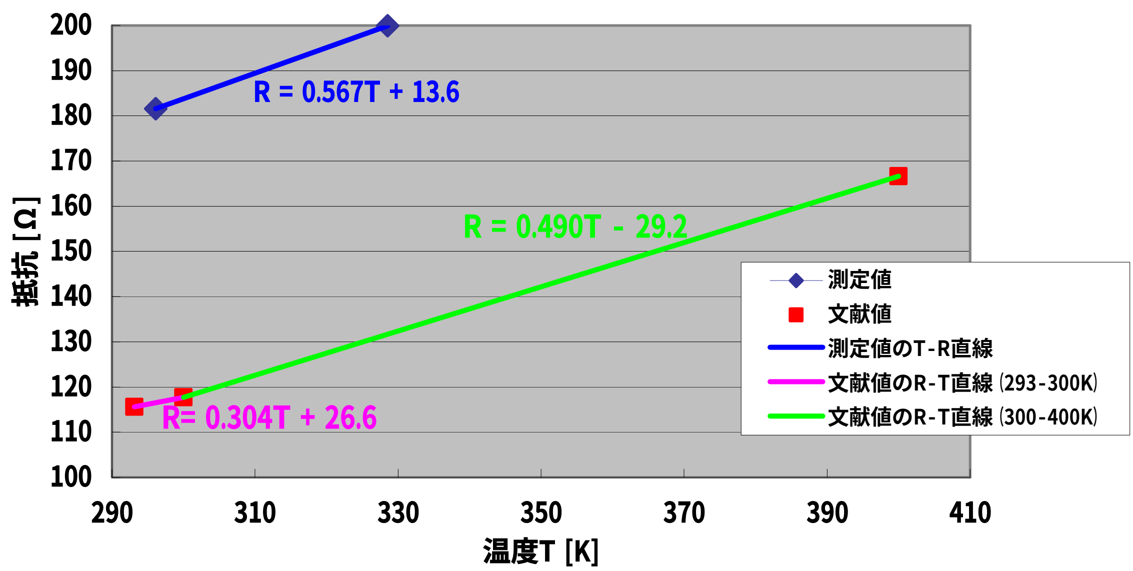

図11　細線抵抗R－温度Tのグラフ

いま，仮に T=296[K]のときの，文献値の抵抗値を式(15)に代入する．
T=296[K]のときの文献値の R の値は直線補間より求めて（図 11 の R=0.304T+26.6 に代入して），R=117[Ω]であるので，これを式(15)の R_0 と dR/dT に代入する．ただし，R_0 および dR/dT 以外は測定値を用いる．

$$
\begin{aligned}
(15) \Leftrightarrow \lambda &= \frac{R_0 S E^3}{4\pi l (R_0 + S)^4} \cdot \frac{dR}{dT} \Big/ \frac{dV}{d\ln t} \\
&= \frac{117 \times 2005.7 \times 14.5676^3}{4 \times \pi \times 0.04090 \times (117 + 2005.7)^4} \cdot \frac{0.304}{4.355 \times 10^{-4}} \\
&= 0.0485 \quad [W/(m \cdot K)]
\end{aligned}
$$

$\lambda_1 > \lambda$であるため，文献値λ[1]と比べてさらに差が広がってしまった．この結果より，R_0だけに原因があるのではなく，S や E, V の測定値にも問題があるのではないかと推測できる．

したがって, 推測の私の考えとしては, ホイーストンブリッジ回路もしくは計測器に何か不具合がありそのために測定値と文献値に大きな差が出たと考える.

８．　実験で得られたもの

正しい熱伝導率は得られなかった．実験自体も数秒で終わってしまうようなものであり，自分自身は何も活動してはいなかったので, 実験中に何か得るような状況ではなかった．しいて言うなら，７節の検討で述べたとおり，測定値が変動する加熱細線熱伝導率 R_0 やブリッジ抵抗値 S は，複数回計測して平均値を測定値とすべきではなかったのではないだろうか．また，回路を安定させる際も，値が常に変動していたため，実際に測定する時点で安定状態にあったかどうかは, かなり疑問を感じる. 物理学実験にしても機械工学実験にしても，今までは「うまくいく実験」しかテーマにならず，そのため，そのあたりの検討法を与えられていれば，得るものもあったかもしれない．いずれにしても，完成された実験で得るものがあるとは到底思えない．この実験は，単に報告書の作成方法および得られた数値の検討および考察方法の学習が主な目的であるため，その趣旨に関しては得たものは大きい.

余談ではあるが，熱の伝わり方（伝熱）を温度を計測しないで求めることができるのには意外な感じを受けた.

-
１）WARREN H. GIEDT／横堀 進･久我 修 共訳　基礎伝熱工学 (1960) 丸善株式会社
P326･付録『表 A.4 スピンドル油の性質』――日本機械学会「伝熱工学資料」より
2) 物理学実験　(1998) P.18 学術図書出版
３）http://www.sunric.com/filea/siryo_1/

全般的について	
表紙 (実験日，提出日，グループ等)	
緒言	
理論	
実験方法	
参考文献（書き方，引用方法は間違っていないか）	
考察に矛盾はないか	
再提出の場合	
指示のあった提出日以内か	

「結果の整理と検討事項」について	
1. 式の導出	
2. dR/dT のグラフ	
3. $dV/d\ln t$ のグラフ	
4. λ のグラフ	
5. 文献値の調査	
6. 不確かさの算出	
7. 結果の考察	
8. 得られたこと (10 行以上)	