

1. 目的

これまでの流体力学では、解析が比較的容易な層流を扱うことが多く、機械工学実験や流体力学の授業など多くの時間をかけて学習を行なった。

しかしながら、身の回りの流体现象を見渡せば、層流状態などほとんど無く、我々は圧倒的に乱流状態の流体と接していることに気が付く。そのため、流体力学を学習する上で、乱流状態の解析を行なうことが必要である。

ただし、乱流状態では、速度場が非定常であるため層流に比べ解析が非常に困難である。

そこで今回の実験では、円管内の乱流の平均速度分布をピトー管で測定し、平均速度分布が層流のそれに比べてどのように異なるのか。データ整理を通して、平均速度分布がどのような法則に従うのかを学習することが目的である。

2. 基礎事項

2.1 乱流とレイノルズ応力

(1) レイノルズ応力

乱流において、流れの速度は図1のように、非定常に不規則な変動をする。このときの時間平均速度 \bar{u} を、

$$\bar{u} \equiv \frac{1}{T} \lim_{T \rightarrow \infty} \int_0^T u(t) \cdot dt \quad (1)$$

を定義すると、速度 u は、

$$u = \bar{u} + u' \quad (2)$$

と書ける。ここで、 u' は速度変動する部分を表し、 $\bar{u}' = 0$ である。

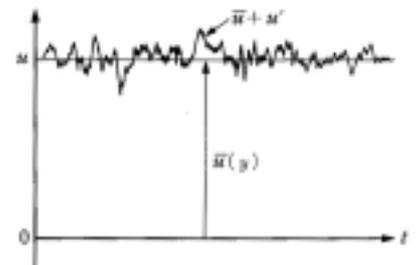


図1 速度変動

さて、流速の乱流成分 u', v' は不規則に変動し、その平均は0であるが、 $u' \cdot v'$ の値は右の図2からも分かるように、 $u' > 0, v' < 0$ および $u' < 0, v' > 0$ で $-u' \cdot v'$ の平均は正の値となる。

例えば、 τ_{yx} は以下のように導出できる。

十分に発達した管路の乱流を考える。ここで、管壁は十分滑らかであるとする。流体のせん断応力はニュートンの粘性法則より、次のように書ける。

$$\tau_{ij} = \mu \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right)$$

せん断応力は分子粘性による応力と乱れ運動による応力の和である。しかし、分子粘性の作用を考慮しなければならないのは壁面のごく近くのみで、そこを離れると乱流運動が卓越して、せん断応力はほとんど乱れ運動による応力であると考えられる。

運動量の法則より y 軸に直角な単位面積には、流入した運動量に等しい応力が運動量成分の方向 (x 軸方向) に作用するとみなすことができるので、統計的平均 E を用いて $E[v'] = 0$ を考慮すれば、

$$\begin{aligned} \tau_{yx} &= -E[\rho(u + u')v'] \\ &= -E[\rho u'v'] \\ &= -\overline{\rho u'v'} \end{aligned}$$

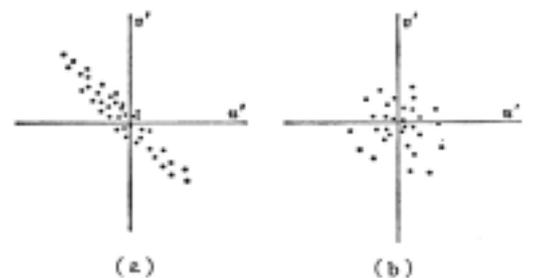


図2 流速の乱流成分

したがって、乱流時のせん断応力は次式となる。

$$\tau_{yx} = \mu \frac{d\bar{u}}{dy} - \overline{\rho u'v'} \approx -\overline{\rho u'v'} \quad (3)$$

ここで中間式第一項は分子粘性によるせん断応力、第二項は乱れ運動によるせん断応力である。

このような流れの乱れ運動に伴う応力は Reynolds によって導かれ、この応力をレイノルズ応力と呼ぶ。同様にして、他の応力成分を求めると、

$$\begin{pmatrix} \sigma_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_{zz} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\overline{\rho u'u'} & -\overline{\rho u'v'} & -\overline{\rho u'w'} \\ -\overline{\rho v'u'} & -\overline{\rho v'v'} & -\overline{\rho v'w'} \\ -\overline{\rho w'u'} & -\overline{\rho w'v'} & -\overline{\rho w'w'} \end{pmatrix}$$

円管内の乱流は、壁面のせん断によって発生する。そこで、円管内の乱流の代表速度は、壁面せん断応力 τ_w と ρ から作られ、摩擦速度 $u_r = \sqrt{\tau_w / \rho}$ と呼ばれる。壁面のせん断応力を直接測定することは難しい。しかし、管内に掛かる圧力とせん断応力のバランスを考えると、それは容易に推算することができる。

$$P \pi R^2 = \tau_w 2\pi RL \quad (4)$$

$$\tau_w = \frac{PR}{2L} \quad (5)$$

(2) レイノルズ方程式

非圧縮性流体を仮定して、外力を無視した Navier-Stokes の式 (NS 式) は、

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i} + \nu \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j \partial x_j} \quad (6)$$

連続の式は、

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_i} = 0 \quad (7)$$

また、速度 u_i および圧力 p を式(2)のように時間平均および時間変動を用いて表現すると、

$$u_i = \bar{u}_i + u'_i \quad (8)$$

$$p = \bar{p} + p' \quad (9)$$

ここで、式(6),(7)に式(8),(9)を代入し、両辺の平均を取ると、

$$\begin{aligned} \text{NS 式;} \quad & \frac{\partial}{\partial t} (\bar{u}_i + u'_i) + (\bar{u}_j + u'_j) \frac{\partial}{\partial x_j} (\bar{u}_i + u'_i) = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x_i} (\bar{p} + p') + \nu \frac{\partial^2}{\partial x_j \partial x_j} (\bar{u}_i + u'_i) \\ \Leftrightarrow & \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial t} + \frac{\partial u'_i}{\partial t} + \bar{u}_j \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \bar{u}_j \frac{\partial u'_i}{\partial x_j} + u'_j \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + u'_j \frac{\partial u'_i}{\partial x_j} \\ & = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p'}{\partial x_i} + \nu \frac{\partial^2 \bar{u}_i}{\partial x_j \partial x_j} + \nu \frac{\partial^2 u'_i}{\partial x_j \partial x_j} \end{aligned}$$

ここで、 $\overline{f \cdot g} = \bar{f} \cdot \bar{g}$ 、 $\overline{f'} = 0$ より、

$$\Leftrightarrow \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial t} + \bar{u}_j \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + u'_j \frac{\partial u'_i}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i} + \nu \frac{\partial^2 \bar{u}_i}{\partial x_j \partial x_j}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial t} + \bar{u}_j \frac{\partial}{\partial x_j} \bar{u}_i + \frac{\partial}{\partial x_j} (\overline{u'_i u'_j}) - \overline{u'_i} \frac{\partial}{\partial x_j} \overline{u'_j} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i} + \nu \frac{\partial^2 \bar{u}_i}{\partial x_j \partial x_j} \quad (10)$$

$$\text{連続の式; } \frac{\partial}{\partial x_i} (\overline{u_i + u'_i}) = 0 \quad \Leftrightarrow \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_i} = 0 \quad (11)$$

また，式(11)より，

$$\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_i} + \frac{\partial \overline{u'_i}}{\partial x_i} = 0 \quad \Leftrightarrow \frac{\partial \overline{u'_i}}{\partial x_i} = 0 \quad (12)$$

である．よって，式(10)に式(11),(12)を代入すると，

$$\begin{aligned} (10) \Leftrightarrow \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial t} + \bar{u}_j \frac{\partial}{\partial x_j} \bar{u}_i + \frac{\partial}{\partial x_j} (\overline{u'_i u'_j}) &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i} + \nu \frac{\partial^2 \bar{u}_i}{\partial x_j \partial x_j} \\ \Leftrightarrow \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial t} + \bar{u}_j \frac{\partial}{\partial x_j} \bar{u}_i &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\mu \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} - \rho \overline{u'_i u'_j} \right) \end{aligned} \quad (13)$$

ここで， $-\rho \overline{u'_i u'_j}$ はレイノルズ応力と呼ばれ，この式(13)はNS式の流速と圧力をそれらの平均値で置き換えたものにレイノルズ応力項を加えた式となっている．

また，式(13)のテンソル表記を各方向成分で表記すれば，

$$\begin{cases} \frac{\partial \bar{u}}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} + \bar{w} \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x} + \nu \left(\frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial z^2} \right) - \left(\frac{\partial \overline{u'^2}}{\partial x} + \frac{\partial \overline{u'v'}}{\partial y} + \frac{\partial \overline{u'w'}}{\partial z} \right) \\ \frac{\partial \bar{v}}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial \bar{v}}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} + \bar{w} \frac{\partial \bar{v}}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial y} + \nu \left(\frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial z^2} \right) - \left(\frac{\partial \overline{u'v'}}{\partial x} + \frac{\partial \overline{v'^2}}{\partial y} + \frac{\partial \overline{v'w'}}{\partial z} \right) \\ \frac{\partial \bar{w}}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial \bar{w}}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial \bar{w}}{\partial y} + \bar{w} \frac{\partial \bar{w}}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial z} + \nu \left(\frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial z^2} \right) - \left(\frac{\partial \overline{u'w'}}{\partial x} + \frac{\partial \overline{v'w'}}{\partial y} + \frac{\partial \overline{w'^2}}{\partial z} \right) \end{cases}$$

2.2 管路の乱流

2.2.1 指数法則

円管内乱流の平均速度分布は，代表速度を管中心平均速度 U_{\max} ，代表長さを半径 R にとると，指数則で近似できる．

$$\frac{\bar{U}}{U_{\max}} = \left(\frac{y}{R} \right)^{\frac{1}{n}} \quad (14)$$

ここで， y は壁面からの距離である．ただし，指数はレイノルズ数に依存し，レイノルズ数と共に増加する．($1/n \sim \ln \text{Re}$)．当初，この法則は経験的に得られ，表現式が簡単なので現在でもしばしば用いられている．最近ではこの法則の物理的な意味も見出されている (Barenblatt 1993)．指数則は，壁面と管中心での速度を正しく示し(ただし，その点での勾配は正しくない)，管内のほぼ全領域を唯一の式で表現することができる．指数則は，実用のレイノルズ数 ($\text{Re} \sim 10^5$) のとき， $n=7$ であることから，しばしば7分の1乗則と呼ばれる．

2.2.2 壁法則

壁面付近の流れは，その近くで重要な役割をする物理量 密度 ρ ，動粘性係数 ν ，壁面摩擦応力 τ_w ，壁からの距離 y により支配され，管全体にかかわる量（レイノルズ数など）には無関係であると推論される．前者のうち τ_w と ν から作られる

$$u_r = \sqrt{\tau_w / \rho} \quad (15)$$

は速度の次元を持ち，速度の代表スケールとみなしうる．これを摩擦速度と呼ぶ．したがって，これらの支配量から作られる無次元長さを

$$y^+ = \frac{u_r \cdot y}{\nu} \quad (16)$$

で定義すれば，壁面近くの流速分布はレイノルズ数に無関係に

$$\frac{\bar{u}}{u_r} = f_n(y^+) \quad (17)$$

の形に書きうる．これを Prandtl の壁法則という．また以後，速度比を $U^+ \equiv \bar{u}/u_r$ で表現する．

ところで，円形断面のパイプなどでの円筒座標系の運動方程式および連続の式は，

$$r \text{ 成分: } \frac{\partial v_r}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \cdot \frac{\partial v_r}{\partial \theta} + v_z \frac{\partial v_r}{\partial z} - \frac{v_\theta^2}{r} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} + \nu \left(\nabla^2 v_r - \frac{v_r}{r^2} - \frac{2}{r^2} \cdot \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} \right) \quad (18)$$

$$\theta \text{ 成分: } \frac{\partial v_\theta}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_\theta}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \cdot \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + v_z \frac{\partial v_\theta}{\partial z} - \frac{v_r v_\theta}{r} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial \theta} + \nu \left(\nabla^2 v_\theta + \frac{2}{r^2} \cdot \frac{\partial v_r}{\partial \theta} - \frac{v_\theta}{r^2} \right) \quad (19)$$

$$z \text{ 成分: } \frac{\partial v_z}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_z}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \cdot \frac{\partial v_z}{\partial \theta} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + \nu \nabla^2 v_z \quad (20)$$

$$\text{連続の式: } \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{v_r}{r} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0 \quad (21)$$

管内流の条件は，

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{非圧縮流れ; } \rho = \text{const} \\ \text{完全発達流; } \frac{\partial v_r}{\partial z} = \frac{\partial v_\theta}{\partial z} = \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0 \\ \text{流れが軸対称; } \frac{\partial}{\partial \theta} = 0 \\ \text{一方向流れ; } v_r = v_\theta = 0 \\ \text{定常流; } \frac{\partial}{\partial t} = 0 \\ \text{自由表面なし} \end{array} \right. \quad (22)$$

これらの条件(21)を NS 式(18),(19),(20)および連続の式(22)に当てはめると，次の式が得られる．

$$\text{NS 式第一式(18)より, } \frac{\partial p}{\partial r} = 0 \quad (23)$$

$$\text{NS 式第三式(19)より, } 0 = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + \nu \left(\frac{\partial^2 v_z}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_z}{\partial r} \right) \quad (24)$$

また,

$$\begin{aligned} p \text{ に関しては, (22),(21)より } \frac{\partial p}{\partial r} = 0, \frac{\partial p}{\partial \theta} = 0 \text{ なので, } \frac{\partial p}{\partial z} = \frac{dp}{dz} \\ v_z \text{ に関しては, (22)完全発達条件より } \frac{\partial v_z}{\partial \theta} = \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0 \text{ なので, } \frac{\partial v_z}{\partial r} = \frac{dv_z}{dr} \end{aligned}$$

したがって, 次式のような常微分方程式が得られる.

$$\mu \left(\frac{d^2 v_z}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dv_z}{dr} \right) = \frac{dp}{dz} \quad (25)$$

ところで, 常微分方程式; $\frac{dy}{dx} + P(x) \cdot y = Q(x)$ の線形微分方程式の一般解は

$$y = \exp\left(-\int P(x)dx\right) \left[\int Q(x) \cdot \exp(P(x)dx) \cdot dx + C \right] \quad C: \text{積分定数}$$

式(25)において, $\frac{dv_z}{dr} = \alpha$ とおくと,

$$\begin{aligned} (25) &\Leftrightarrow \frac{d\alpha}{dr} + \frac{\alpha}{r} = \frac{1}{\mu} \frac{dp}{dz} \\ &\Leftrightarrow \alpha = \frac{dv_z}{dr} = \exp\left(-\int \frac{1}{r} dr\right) \left[\int \frac{1}{\mu} \frac{dp}{dz} \exp\left(\int \frac{1}{r} dr\right) dr + A \right] \\ &= \exp(-\ln r) \left[\frac{1}{\mu} \frac{dp}{dz} \int \exp(\ln r) dr + A \right] \\ &= \frac{1}{r} \left(\frac{1}{\mu} \frac{dp}{dz} \int r dr + A \right) \\ &= \frac{1}{2\mu} \frac{dp}{dz} r + \frac{1}{r} A \\ &\Leftrightarrow v_z = \frac{1}{2\mu} \frac{dp}{dz} \int r dr + A \int \frac{1}{r} dr \\ &= \frac{1}{4\mu} \frac{dp}{dz} r^2 + A \ln r + B \end{aligned} \quad (26)$$

ただし, A, B は積分定数であり, 境界条件を用いて求める.
境界条件は,

- $r = 0$ で, $v_z = V_{\max}$ となり, v_z は有限値を採る. $\lim_{r \rightarrow 0} \ln r = \infty$ で発散することより, $A = 0$ が得られる.
- 管壁ですべりなし条件を仮定すると, $r = R$ で $v_z = 0$

$$\therefore (26) \Leftrightarrow B = -\frac{1}{4\mu} \frac{dp}{dz} R^2$$

したがって, 管内流の速度分布は,

$$v_z = \frac{1}{4\mu} \frac{dp}{dz} r^2 - \frac{1}{4\mu} \frac{dp}{dz} R^2 = -\frac{1}{4\mu} \frac{dp}{dz} (R^2 - r^2) \quad (27)$$

さて，十分に発達した管路の乱流を考える．ここで，管壁は十分滑らかであるとする．平均流速 $u^+ = u/u^*$ に関する流体のせん断応力はニュートンの粘性法則より，次のように書ける．ただし， u は軸方向速度 v_z に等しい．

$$\tau = \mu \left(\frac{dv_z}{dr} + \frac{dr}{dv_z} \right) = \mu \frac{dv_z}{dr}$$

したがって，式(27)よりせん断応力は，

$$|\tau| = \left| -\mu \cdot \frac{1}{4\mu} \frac{dp}{dz} \frac{d}{dr} (R^2 - r^2) \right| = \frac{r}{2} \left(-\frac{dp}{dz} \right) \quad (28)$$

ここで， r を壁からの距離 y を用いた，壁座標表示すると，

$$r = R - y \quad (29)$$

の関係がある．よって，式(28)は次のように書き換えられる．(ただし， > 0 とする)

$$\tau = \frac{R - y}{2} \left(-\frac{dp}{dz} \right) \quad (30)$$

ところで，Prandtl の混合距離理論によれば，レイノルズ応力は次式に書き換えられる．

$$\tau = -\overline{\rho u'v'} = \rho \ell^2 \cdot \left| \frac{d\bar{u}}{dy} \right| \cdot \frac{d\bar{u}}{dy} \quad (31)$$

混合距離 ℓ に関して Prandtl と Kalman はそれぞれ次のように仮定した．

$$\text{A) Prandtl; } \ell = \kappa y \quad (32)$$

$$\text{B) Kalman; } \ell = \kappa \frac{d\bar{u}}{dy} / \frac{d^2\bar{u}}{dy^2} \quad (33)$$

管路乱流のせん断応力は，式(30)のように直線分布となるが，混合距離に関する Prandtl の仮定が適用しうる範囲では，むしろせん断応力は壁面せん断応力 τ_w に等しいと考えるべきである．こうした領域を“一定せん断応力層”と呼ぶ．結局，せん断応力分布は，

$$\tau = \tau_w = -\frac{dp}{dz} \cdot \frac{R}{2} \quad (34)$$

あるいは断面全体を考えれば

$$\tau = \left(1 - \frac{y}{R} \right) \tau_w \quad (35)$$

管内流速は，式(31)に上式の τ_w および ℓ の関係式を代入して積分を行うことで求めることができる．そのうち，最も単純な仮定の組，Prandtl の仮定式(32)およびせん断応力分布式(34)を用い，かつ，式(31)で $d\bar{u}/dy$ が今回の場合は常に正であるので，絶対値記号を取り除けば，次の関係式が得られる．

$$\begin{aligned} (31) \Leftrightarrow \tau_w &= \rho (\kappa y)^2 \left(\frac{d\bar{u}}{dy} \right)^2 \\ \Leftrightarrow \frac{d\bar{u}}{dy} &= \frac{1}{\kappa y} \sqrt{\frac{\tau_w}{\rho}} \end{aligned}$$

式(15)より， $u_r = \sqrt{\tau_w/\rho}$ なので上式は，

$$\Leftrightarrow \frac{d\bar{u}}{dy} = \frac{u_r}{\kappa} \cdot \frac{1}{y} \quad (36)$$

したがって，式(36)を積分して管路乱流の流速分布式が得られる．

$$\begin{aligned} (36) \Leftrightarrow \bar{u} &= \frac{u_r}{\kappa} \ln y + C \quad (C; \text{積分定数}) \\ \therefore \frac{\bar{u}}{u_r} &= \frac{1}{\kappa} \ln y + C' \quad (C' = C/u_r) \end{aligned} \quad (37)$$

さて，壁面付近で“壁法則”が成り立つことを考えれば，式(37)は新たに普遍定数 A_s (添字 s は smooth の意味) を導入して，

$$\therefore \frac{\bar{u}}{u_r} = \frac{1}{\kappa} \ln \frac{u_r y}{\nu} + A_s \quad (38)$$

カルマン定数 および普遍定数 A_s は実験値より， $\kappa = 0.4$ ，普遍定数 $A_s = 5.5$ と定まっているので，式(38)は次式のようになる．

$$\begin{aligned} \frac{\bar{u}}{u_r} = U^+ &= \frac{1}{0.4} \ln \frac{u_r y}{\nu} + 5.5 \\ \Leftrightarrow U^+ &= 2.5 \ln y^+ + 5.5 \\ \Leftrightarrow U^+ &= 5.75 \log y^+ + 5.5 \end{aligned} \quad (39)$$

摩擦速度の定義から解るように，壁近傍では，平均速度分布が直線的に変化する粘性底層があり，壁変数を使うと，次式で表される．

$$U^+ = y^+ \quad (40)$$

これは， $y^+ \leq 5$ で成り立つ．

壁からも管中心からも十分に離れた領域 ($30 \leq y^+ \leq 0.3R^+$) で，平均速度分布は対数速度分布で表され，

$$U^+ = \frac{1}{\kappa} \ln y^+ + B$$

これを対数則と呼ぶ．式(39)でも示したように，多くの測定により $\kappa = 0.4$ ， $B = 5.5$ が普遍定数として受け入れられているが，最近の実験ではそれより若干おおきな値が提案されている ($\kappa = 0.44$ ， $B = 6.1$ ，Zagarola and Smits 1997)．

$y^+ \approx 0.3R^+$ を越えると，平均速度は対数速度分布からはずれるが，その差は円管内乱流の場合は僅かなため，工学上は管中心部全域で対数速度分布が成立するとして解析を行っても問題はなく，むしろ解析を簡単にできる利点もある．対数則が成立する範囲はおおむね $30 \leq y^+ \leq 0.3R^+$ である．

対数領域と粘性底層の間には，粘性応力とレイノルズ応力の両方が平均速度分布に重要な遷移領域がある．

2.2.3 速度欠損則

管中心部では、粘性の効果が無視できるので、平均速度分布は半径 R （または直径 D ）と摩擦係数 u_τ で表現できる。また、管中心では管中心の平均速度が最もわかりやすい速度なので、管中心の平均速度から差（速度欠損）で速度分布を表現する。

$$\frac{U_{\max} - \bar{U}}{u_\tau} = g\left(\frac{y}{R}\right) \quad (41)$$

これを Karman の中心法則または速度欠損則という。

式(38)において、 $y = R$ で、 $\bar{u} = U_{\max}$ とすると、

$$(38) \Leftrightarrow \frac{U_{\max}}{u_r} = \frac{1}{\kappa} \ln \frac{u_r R}{\nu} + A_s \quad (42)$$

この式(42)と式(38)の差をとると、

$$\begin{aligned} \frac{U_{\max}}{u_r} - \frac{\bar{u}}{u_r} &= \frac{1}{\kappa} \ln \frac{u_r R}{\nu} \cdot \frac{\nu}{u_r y} \\ \Leftrightarrow \frac{U_{\max} - \bar{u}}{u_r} &= \frac{1}{\kappa} \ln \frac{R}{y} \end{aligned} \quad (43)$$

対数速度分布に対する領域 ($y/R \leq 0.3$) では、

$$\frac{U_{\max} - \bar{u}}{u_\tau} = -\frac{1}{\kappa} \ln \left(\frac{y}{R}\right) + B^* \quad (B^* = 1 \sim 2) \quad (44)$$

管中心部では、次式が経験的解析的に成立することが知られている。

$$\frac{U_{\max} - \bar{U}}{u_\tau} = A \left(1 - \frac{y}{R}\right)^p = A \left(\frac{r}{R}\right)^p \quad (45)$$

ここで r は管中心からの距離。実験より $A = 7 \sim 8$, $p = 1.5 \sim 2$ が得られている。これは $y/R \geq 0.3$ で広範囲のレイノルズ数の実験値と一致する。

3 . 実験装置

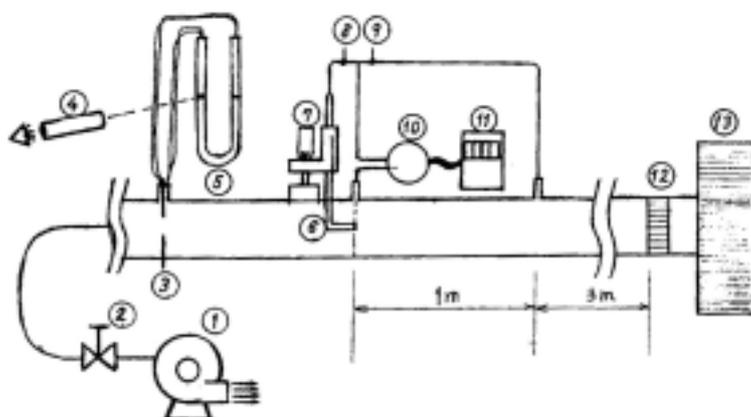


図3 実験装置

図5に実験装置を示す．実験装置の図番は以下の通りである．
送風機，流量調整バルブ，オリフィス，読み取り望遠鏡，マノメータ，ピトー管，トラバース用マイクロメータ，切り替えコック，圧力変換器，デジタル動歪計，整流格子，フィルター

4 . 実験方法

- 1 . 送風機に電源を入れる．
- 2 . 最下流に設置されたオリフィスに接続されたマノメータを見ながら，流量を送風機直前の流量調整バルブで調整し，マノメータの読みをカセットメータで読み取り記録する（実験終了時にも確認する）．
- 3 . 切り替えコック（閉）（開）にし，上流部圧力取り出し孔と静圧取り出し孔の圧力差をデジタル動歪計（単位 mmAq）から読み取る（摩擦速度の推算）．
- 4 . 切り替えコック（開）（閉）にし，ピトー管を所定の位置にマイクロメータを介したトラバース装置で設定し，ピトー管の動圧をデジタル動歪計（単位 mmAq）から読み取る（速度分布の測定）．
- 5 . 上記の操作(2)(3)(4)を3種類の流量で繰り返し行う．
- 6 . 実験終了後，流量バルブを閉じ，送風機の電源を落とす．

4 . 1 物性値と代表値

重力加速度は， $g = 9.80665 \text{ [m/s}^2\text{]}$ とする．

ベッツ型マノメータには純水が，またゲッチンゲン型マノメータにはアルコールが指差液体として使用されているので，マノメータにより圧力を測定するためにはこれら指差液体の密度を知る必要がある．ここでは，純水の密度は $\rho_{\text{水}} = 1000.0 \text{ [kg/m}^3\text{]}$ とする．アルコールの密度 ρ_{Alc} は密度の検定グラフを用いて，アルコールの温度の関数として与える．

ピトー静圧管により気流の流速を測定するためには，マノメータの指差液体の密度に加えて，空気の密度も知る必要がある．ここでは空気を理想気体と考え，状態方程式より密度を算定する．気温 $T^* = 273.15 \text{ [K]}$ ，気圧 $p^* = 760 \text{ [mmHg]}$ での空気の密度は $\rho^* = 1.2932 \text{ [kg/m}^3\text{]}$ であることを用いれば，気温 $T \text{ [K]}$ ，気圧 $p \text{ [mmHg]}$ での空気の密度 $\rho_{\text{air}} \text{ [kg/m}^3\text{]}$ は次式で与えられる．

$$\frac{p_*/\rho_*}{p/\rho_{air}} = \frac{RT_*}{RT}$$

$$\rho_{air} = \rho_* \frac{T_*}{T} \frac{p}{p_*} \quad [\text{kg/m}^3] \quad (46)$$

空気の粘性係数の算定には，Sutherlandの式を用いる．気温 $T^* = 273.15$ [K]での粘性係数 $\mu^* = 1.724 \times 10^{-5}$ [Pa·s]，および定数 $S_1 = 110.4$ [K]により，気温 T [K]での空気の粘性係数 μ_{air} [Pa·s]は次式で与えられる．

$$\mu_{air} = \mu_* \frac{S_1 + T_*}{S_1 + T} \left(\frac{T}{T_*} \right)^{\frac{3}{2}} \quad [\text{Pa}\cdot\text{s}] \quad (47)$$

空気の動粘度は定義より $\nu_{air} = \mu_{air} / \rho_{air}$ [m²/s]である．

4.2 流量および流速の算出

(1) 摩擦速度

式(15)より，摩擦速度は， $u_r = \sqrt{\tau_w / \rho}$ で与えられる．

また，式(5)より力の釣り合い式より壁面摩擦 τ_w は次式であらわされる．

$$(5) \Leftrightarrow \tau_w = \frac{PR}{2L} = \frac{D \cdot P}{4L} \quad (D \text{ は直径})$$

したがって，式(15)に式(5)を代入して，

$$u_r = \sqrt{\frac{\tau_w}{\rho_{air}}} = \sqrt{\frac{D}{4L} \cdot \frac{P}{\rho_{air}}} \quad (48)$$

今回の実験では，圧力差の測定にマンノメータ（水）を使用するので，

$$P = \rho_{water} g H$$

よって，

$$(48) \Leftrightarrow u_r = \sqrt{\frac{D}{4L} \cdot \frac{\rho_{water} g H}{\rho_{air}}} \quad (49)$$

(2) 流速測定

流速の測定にはピトー管を用いる．ピトー管を用いて全圧 p_1 と静圧 p_2 との差圧 ($p_1 - p_2$) を測定すれば，ベルヌーイの式より導かれる次式によって流速を求めることができる．

$$\text{ベルヌーイの式: } \frac{p_1}{\rho_1} + \frac{v_1^2}{2} + gz_1 = \frac{p_2}{\rho_2} + \frac{v_2^2}{2} + gz_2$$

ただし， $\rho_1 = \rho_2 = \text{const} = \rho$ ， $z_1 = z_2$ とし，また，よどみ点より $v_2 = 0$ なので，上式は，

$$\frac{p_1}{\rho} + \frac{v_1^2}{2} = \frac{p_2}{\rho} \quad (50)$$

$$\Leftrightarrow v_1 = \sqrt{\frac{2}{\rho}(p_2 - p_1)} \quad (51)$$

また，よどみ点圧力 p_2 は，式(50)より次のように書き換えられる．

$$p_2 = p_1 + \frac{\rho v_1^2}{2} \quad (52)$$

よって、マノメータにより $p_1 - p_2 = \rho_{water} gH$ を測定すれば式(51)より速度 v_1 が求まる。

$$(51) \Leftrightarrow v_1 = \sqrt{\frac{2}{\rho_{air}}(p_2 - p_1)} = \sqrt{2 \frac{\rho_{water} gH}{\rho_{air}}} \quad (53)$$

実際には、静圧測定孔の位置やピトー管形状により式(51)を補正した次式を用いる。

$$v_1 = k \sqrt{2 \frac{\rho_{water} gH}{\rho_{air}}} \quad (54)$$

ここで、 k はピトー管係数である。ピトー管の全圧測定孔の指示圧は、孔径がある大きさを保つため、真の全圧を指示しない。また、静圧測定孔の指示圧はピトー管の頭部と下流側支柱の影響を受けて必ずしも真の静圧を示さない。したがって、製作した個々のピトー管係数がそれぞれ異なるので使用に先立ってあらかじめ測定しようとする流速の範囲で概知の流速のもとでピトー管係数 k をあらかじめ校正しておく必要がある。

ただし、標準形のピトー管では広範囲の流速に対してほとんど $k=1.0$ に近い値である。

5. 測定結果

気温； $t = 13.0 [] = 286.15 [K]$

気圧； $p = 761.9 [mmHg] = 0.1016 [MPa]$

式(46)より空気の密度は、

$$(46) \quad \rho_{air} = \rho_* \frac{T_*}{T} \frac{p}{p_*} = 1.2932 \times \frac{273.15}{286.15} \times \frac{761.9}{760} = 1.238 \quad [kg/m^3]$$

空気の粘性係数は式(47)の Sutherland の式より、

$$(47) \quad \mu_{air} = \mu_* \frac{S_1 + T_*}{S_1 + T} \left(\frac{T}{T_*} \right)^{\frac{3}{2}} = 1.724 \times 10^{-5} \times \frac{110.4 + 273.15}{110.4 + 286.15} \times \left(\frac{286.15}{273.15} \right)^{\frac{3}{2}} = 1.788 \times 10^{-5} \quad [Pa \cdot s]$$

したがって、空気の動粘度は定義式より、

$$\nu_{air} = \frac{\mu_{air}}{\rho_{air}} = \frac{1.788 \times 10^{-5}}{1.238} = 1.445 \times 10^{-5} \quad [m^2/s]$$

また、純水の密度：1000[kg/m³]である。

(1) オリフィス圧力損失ヘッド $H_Q = 557.20 [mmH_2O]$

オリフィス圧力損失ヘッド； $H_Q = 557.20 [mmH_2O]$

圧力損失ヘッド； $H_p = 11.5 [mmH_2O]$

摩擦速度； $u_r = \sqrt{\frac{D}{4L} \cdot \frac{\rho_{water} g H}{\rho_{air}}} = 0.978 [m/s]$

ただし、 $D = 0.042 [m]$ 、 $L = 1.0 [m]$ である。

測定結果を表1に示す。ここで、式(54)におけるピトー管係数を $k = 1.0$ とする。

また、 z はマノメータの目盛、 y は壁からの距離、 r は中心からの距離

表1 オリフィス圧力損失ヘッド $H_Q=557.20$ [mmH₂O]

No.	z [mm]	y [mm]	r [mm]	y/R	r/R	u _r /	H _u [mmH ₂ O]	u [m/s]	u/u _{max}	u/u _r	(u _{max} -u)/u _r
1	47.40	21.00	0.00	1.000	0.000	1420	36.6	24.1	0.996	24.6	0.101
2	45.40	19.00	2.00	0.905	0.095	1290	35.9	23.9	0.986	24.4	0.337
3	43.40	17.00	4.00	0.810	0.190	1150	34.7	23.5	0.970	24.0	0.748
4	41.40	15.00	6.00	0.714	0.286	1020	33.4	23.0	0.951	23.5	1.20
5	39.40	13.00	8.00	0.619	0.381	880	31.7	22.4	0.927	22.9	1.81
6	37.40	11.00	10.00	0.524	0.476	745	30.0	21.8	0.902	22.3	2.43
7	35.40	9.00	12.00	0.429	0.571	609	28.0	21.1	0.871	21.5	3.19
8	33.40	7.00	14.00	0.333	0.667	474	25.8	20.2	0.836	20.7	4.05
9	31.40	5.00	16.00	0.238	0.762	339	23.3	19.2	0.795	19.6	5.08
10	30.40	4.00	17.00	0.190	0.810	271	22.7	19.0	0.784	19.4	5.33
11	29.40	3.00	18.00	0.143	0.857	203	20.6	18.1	0.747	18.5	6.25
12	28.40	2.00	19.00	0.095	0.905	135	18.5	17.1	0.708	17.5	7.22
13	27.40	1.00	20.00	0.048	0.952	67.7	14.9	15.4	0.635	15.7	9.01
14	26.90	0.50	20.50	0.024	0.976	33.9	9.8	12.5	0.515	12.7	12.0
15	47.40	21.00	0.00	1.000	0.000	1420	36.9	24.2	1.000	24.7	0.000

(2) オリフィス圧力損失ヘッド $H_Q = 299.95$ [mmH₂O]

オリフィス圧力損失ヘッド $H_Q = 299.95$ [mmH₂O]

圧力損失ヘッド ; $H_p = 7.1$ [mmH₂O]

$$\text{摩擦速度 ; } u_r = \sqrt{\frac{D}{4L} \cdot \frac{\rho_{\text{water}} g H}{\rho_{\text{air}}}} = 0.769 \text{ [m/s]}$$

表2 オリフィス圧力損失ヘッド $H_Q=299.95$ [mmH₂O]

No.	z [mm]	y [mm]	r [mm]	y/R	r/R	u _r /	H _u [mmH ₂ O]	u [m/s]	u/u _{max}	u/u _r	(u _{max} -u)/u _r
1	47.40	21.00	0.00	1.000	0.000	1120	20.7	18.1	1.000	23.6	0.000
2	45.40	19.00	2.00	0.905	0.095	1010	20.3	17.9	0.990	23.3	0.229
3	43.40	17.00	4.00	0.810	0.190	904	19.7	17.7	0.976	23.0	0.576
4	41.40	15.00	6.00	0.714	0.286	798	19.0	17.4	0.958	22.6	0.989
5	39.40	13.00	8.00	0.619	0.381	692	18.0	16.9	0.932	22.0	1.59
6	37.40	11.00	10.00	0.524	0.476	585	17.1	16.5	0.909	21.4	2.15
7	35.40	9.00	12.00	0.429	0.571	479	15.9	15.9	0.876	20.7	2.91
8	33.40	7.00	14.00	0.333	0.667	372	14.6	15.2	0.840	19.8	3.77
9	31.40	5.00	16.00	0.238	0.762	266	13.1	14.4	0.796	18.7	4.82
10	30.40	4.00	17.00	0.190	0.810	213	12.1	13.8	0.765	18.0	5.55
11	29.40	3.00	18.00	0.143	0.857	160	11.2	13.3	0.736	17.3	6.23
12	28.40	2.00	19.00	0.095	0.905	106	10.0	12.6	0.695	16.4	7.19
13	27.40	1.00	20.00	0.048	0.952	53.2	7.9	11.2	0.618	14.6	9.01
14	26.90	0.50	20.50	0.024	0.976	26.6	4.8	8.7	0.482	11.3	12.2
15	47.40	21.00	0.00	1.000	0.000	1120	20.6	18.1	0.998	23.5	0.057

(3) オリフィス圧力損失ヘッド $H_Q = 151.60$ [mmH₂O]

オリフィス圧力損失ヘッド $H_Q = 151.60$ [mmH₂O]

圧力損失ヘッド ; $H_p = 4.3$ [mmH₂O]

$$\text{摩擦速度 ; } u_r = \sqrt{\frac{D \cdot \rho_{\text{water}} g H}{4L \rho_{\text{air}}}} = 0.598 \text{ [m/s]}$$

表3 オリフィス圧力損失ヘッド $H_Q=151.60$ [mmH₂O]

No.	z [mm]	y [mm]	r [mm]	y/R	r/R	$u_r y/$	H_u [mmH ₂ O]	u [m/s]	u/u_{\max}	u/u_r	$(u_{\max}-u)/u_r$
1	47.40	21.00	0.00	1.000	0.000	869	11.8	13.7	1.000	22.9	0.000
2	45.40	19.00	2.00	0.905	0.095	787	11.0	13.2	0.965	22.1	0.789
3	43.40	17.00	4.00	0.810	0.190	704	10.7	13.0	0.952	21.8	1.09
4	41.40	15.00	6.00	0.714	0.286	621	10.3	12.8	0.934	21.4	1.50
5	39.40	13.00	8.00	0.619	0.381	538	9.8	12.5	0.911	20.8	2.03
6	37.40	11.00	10.00	0.524	0.476	455	9.3	12.1	0.888	20.3	2.57
7	35.40	9.00	12.00	0.429	0.571	373	8.8	11.8	0.864	19.7	3.12
8	33.40	7.00	14.00	0.333	0.667	290	8.1	11.3	0.828	18.9	3.92
9	31.40	5.00	16.00	0.238	0.762	207	7.3	10.8	0.787	18.0	4.88
10	30.40	4.00	17.00	0.190	0.810	166	6.9	10.5	0.765	17.5	5.38
11	29.40	3.00	18.00	0.143	0.857	124	6.5	10.1	0.742	17.0	5.89
12	28.40	2.00	19.00	0.095	0.905	82.8	5.7	9.5	0.695	15.9	6.97
13	27.40	1.00	20.00	0.048	0.952	41.4	4.7	8.6	0.631	14.4	8.43
14	26.90	0.50	20.50	0.024	0.976	20.7	2.8	6.7	0.487	11.1	11.7
15	47.40	21.00	0.00	1.000	0.000	869	11.3	13.4	0.979	22.4	0.490

ここで、各流量の平均流速測定値の管内分布図を図4に、さらに測定結果を最大流速値で規格化したものを図5に示す。図5を見ると、規格化した速度分布が同じモードを示していることがわかる。このことから、乱流状態においても平均流速の速度分布には法則性があることが伺える。

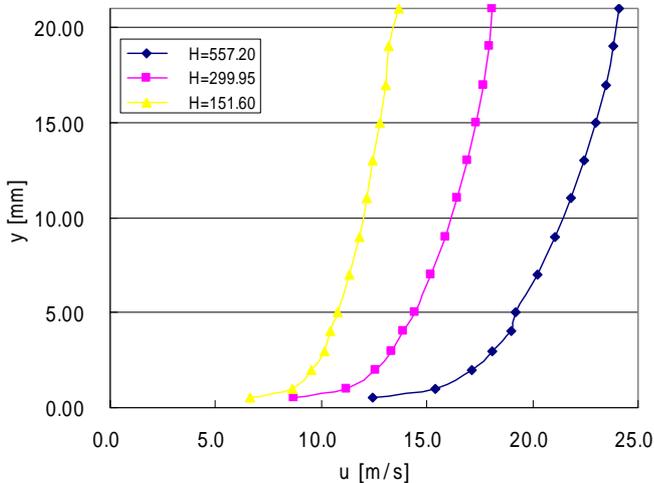


図4 速度分布

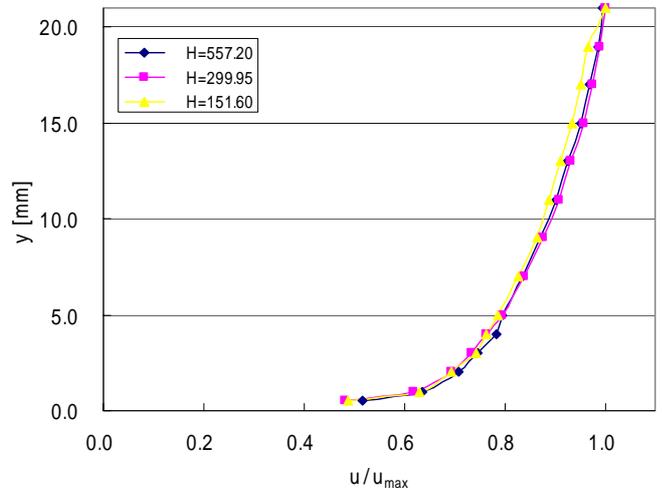


図5 速度分布の規格化

6 . 考察課題

6 . 1 指数則

図6 (p.16) に、縦軸を y/R , 横軸を u/u_{\max} とした両対数グラフを示す .

また、式(14)のように、 y/R と u/u_{\max} には、指数則より、

$$(14) \Leftrightarrow \frac{\bar{U}}{U_{\max}} = \left(\frac{y}{R} \right)^{\frac{1}{n}}$$

の関係があることが知られているので、この指数 n を決定する .

図5にも示したように、 u/u_{\max} は測定した3度の流量すべてでほぼ等しい値となっているので、近似直線は3測定点の平均値から求める . また、 $y/R \leq 0.2$ では測定点が対数グラフ上で直線となっていないので、近似直線は $y/R > 0.2$ の範囲の測定点でのみ求める .

Windows Excel の累乗近似関数より、近似式は次式となった .

$$\frac{\bar{U}}{U_{\max}} = 0.999 \left(\frac{y}{R} \right)^{0.162}$$

よって、今回の実験の指数 n は、

$$\frac{1}{n} = 0.162 \quad \Leftrightarrow \quad n = 6.16 \quad (55)$$

一般的に、指数則 n は、 $n=7$ であるが、今回の測定では $n=6.16$ となった .

対数則は、管壁の粗滑にかかわらず成り立つ速度分布式として知られている式ではあるが、管が粗い場合には滑管に比べて n の値は小さくなる .

その他、 n の値が変化する要因としては、レイノルズ数の範囲内においても ($Re \approx 10^5$) Re 数の増加とともにすこし増加し、実験式の近似式として、

$$n = 2 \log \frac{Re}{10} \quad (\text{滑管})$$

が知られている .

6 . 2 対数則

片対数グラフに実験データをプロットし、 $30 \leq y^+ \leq 0.3R^+$ のデータから対数則に現われるカルマン定数 κ およびその他の定数を決定する .

式(38)より、

$$(38) \Leftrightarrow \frac{\bar{u}}{u_r} = \frac{1}{\kappa} \ln \frac{u_r y}{\nu} + A_s$$
$$\Leftrightarrow \frac{\bar{u}}{u_r} = \frac{1}{\kappa \log e} \log \frac{u_r y}{\nu} + A_s \quad (56)$$

よって、これらの係数を決定する .

図7 (p.17) に縦軸を $U^+ = \frac{\bar{u}}{u_r}$, 横軸を $y^+ = \frac{u_r y}{\nu}$ として片対数のグラフを作成する .

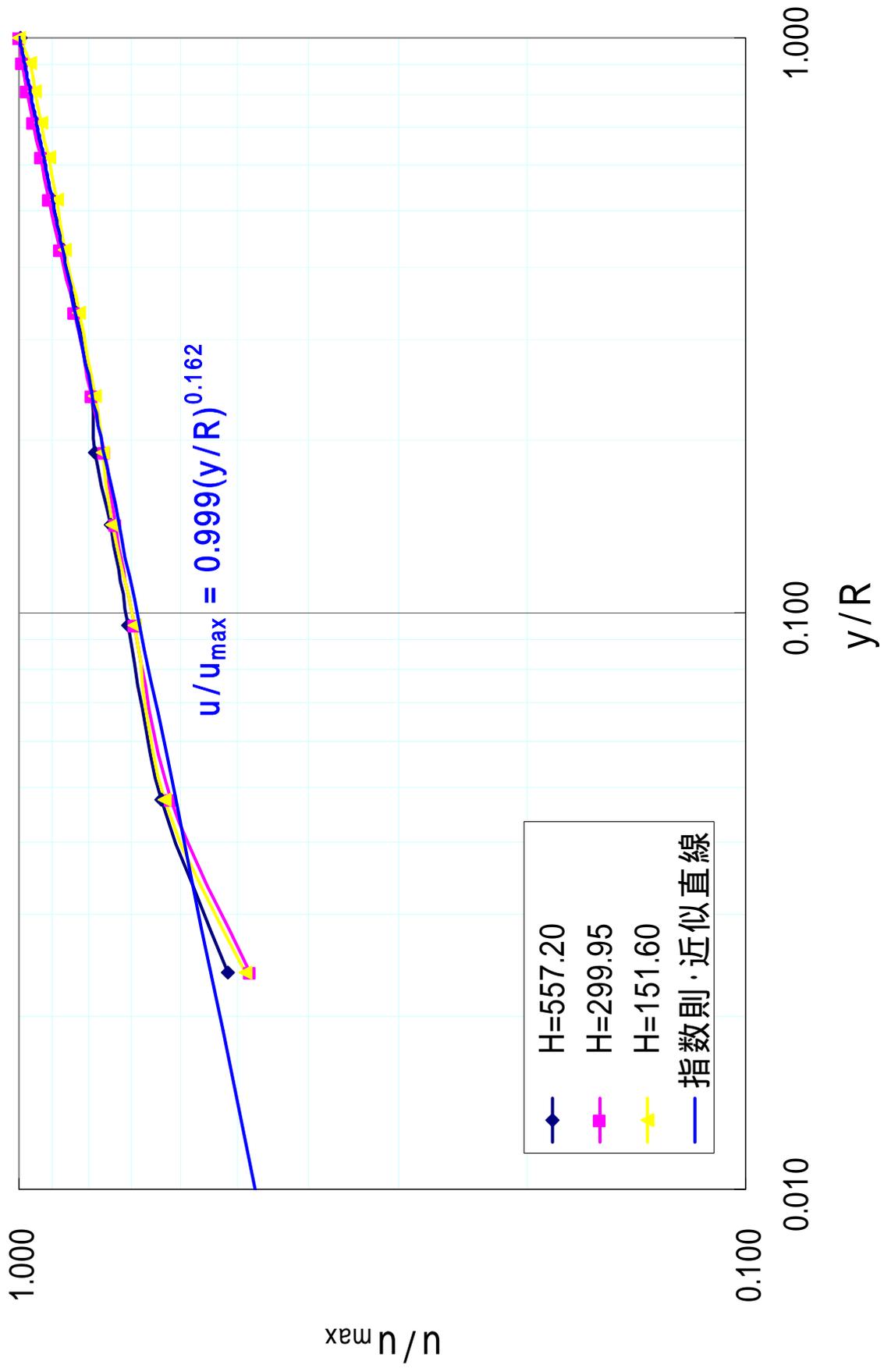


图6 指数则

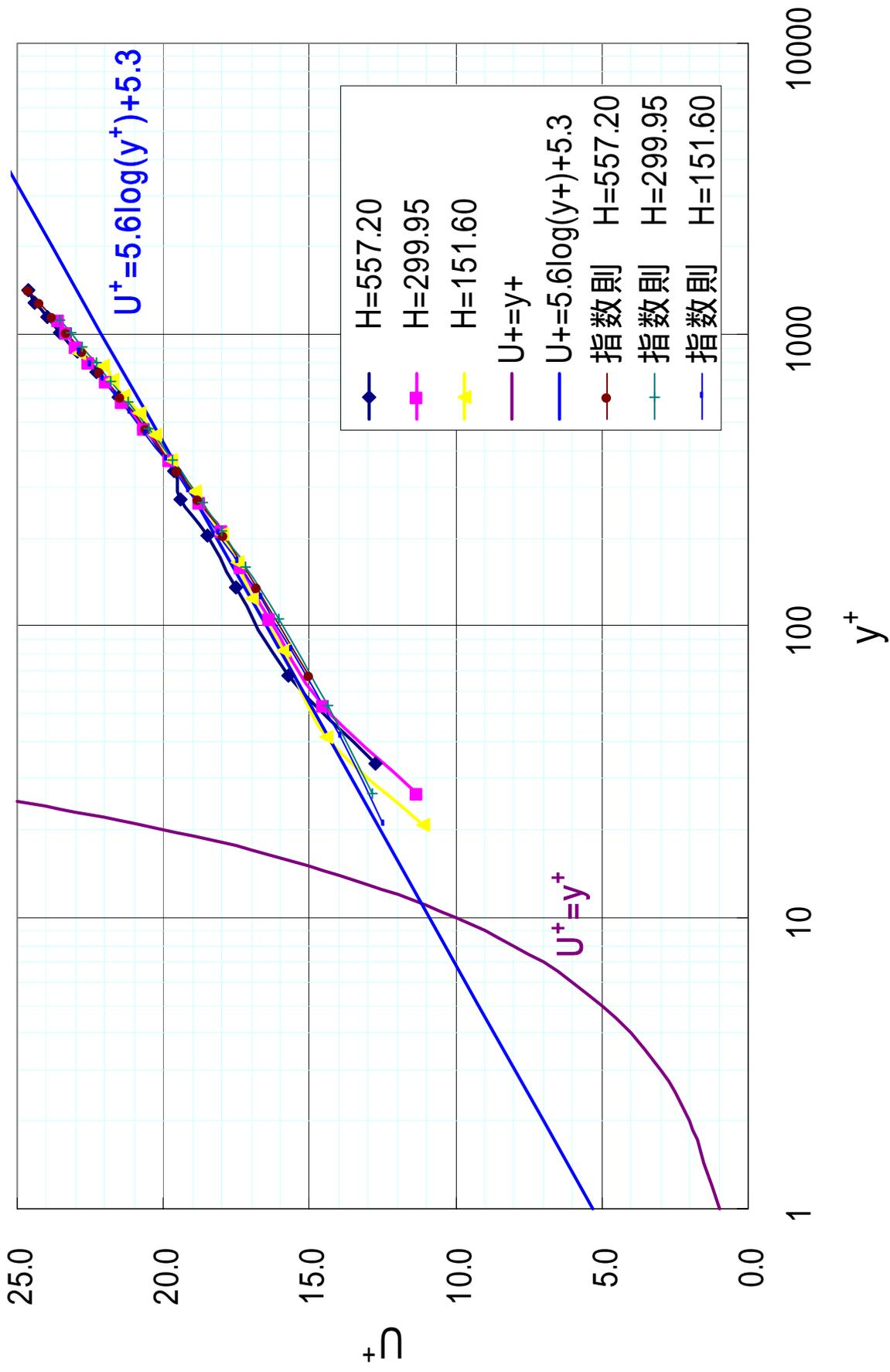


图7 对数则

プロットして得られた近似式は，

$$U^+ = 5.6 \log y^+ + 5.3 \quad (57)$$

これを，式(56)と比較して，

$$\kappa = \frac{1}{5.6 \log e} = 0.41, \quad A_s = 5.3 \quad (58)$$

一般的に言われている普遍定数は $\kappa = 0.4$ ， $A_s = 5.5$ であるので，近い値といえる．

また，管中心平均速度の対数則とのズレは， $u^+ = U_{\max}^+ - \bar{U}^+$ より，

- $H_Q = 557.20$; $u^+ = 24.6 - (5.6 \log 1420 + 5.3) = 1.67$
- $H_Q = 299.95$; $u^+ = 23.6 - (5.6 \log 1120 + 5.3) = 1.20$
- $H_Q = 151.60$; $u^+ = 22.9 - (5.6 \log 869 + 5.3) = 1.10$

これらの値から流量が大きいほど，または最大流速が大きいほど管中心平均速度の対数則とのズレも大きくなることが分かる．

また，図7のグラフに指数則から得られる速度分布も付記する．

$$\begin{aligned} (14) \Leftrightarrow \frac{\bar{U}}{U_{\max}} &= \left(\frac{y}{R} \right)^{\frac{1}{n}} \\ \Leftrightarrow \frac{\bar{U}}{u_r} &= \frac{U_{\max}}{u_r} \cdot \left(\frac{y}{R} \right)^{\frac{1}{n}} \end{aligned} \quad (59)$$

指数則から得られる速度分布は，式(59)で得られる U^+ の値と測定点の y^+ でプロットする．

6.3 $\frac{u_{\max} - u}{u_r}$ $\frac{y}{R}$ 線図

図8に $\frac{u_{\max} - u}{u_r}$ $\frac{y}{R}$ をプロットし，対数則のグラフ ($U_{\max}^+ - \bar{U}^+$ vs. y/R) を示す．

式(44)より，図7より $\kappa = 0.41$ として対数則は，

$$\begin{aligned} (44) \Leftrightarrow \frac{U_{\max} - \bar{u}}{u_r} &= -\frac{1}{\kappa} \ln \left(\frac{y}{R} \right) + B^* \quad (B^* = 1 \sim 2) \\ \Leftrightarrow \frac{U_{\max} - \bar{u}}{u_r} &= -5.6 \log \left(\frac{y}{R} \right) + B^* \end{aligned}$$

で表すことができる．

図8での比較より，今回の実験での定数は $B^* = 1.4$ とした．

$y/R < 0.3$ の範囲で対数則と測定値がよく一致していることが伺えるが，このグラフも壁面付近では説明できない．

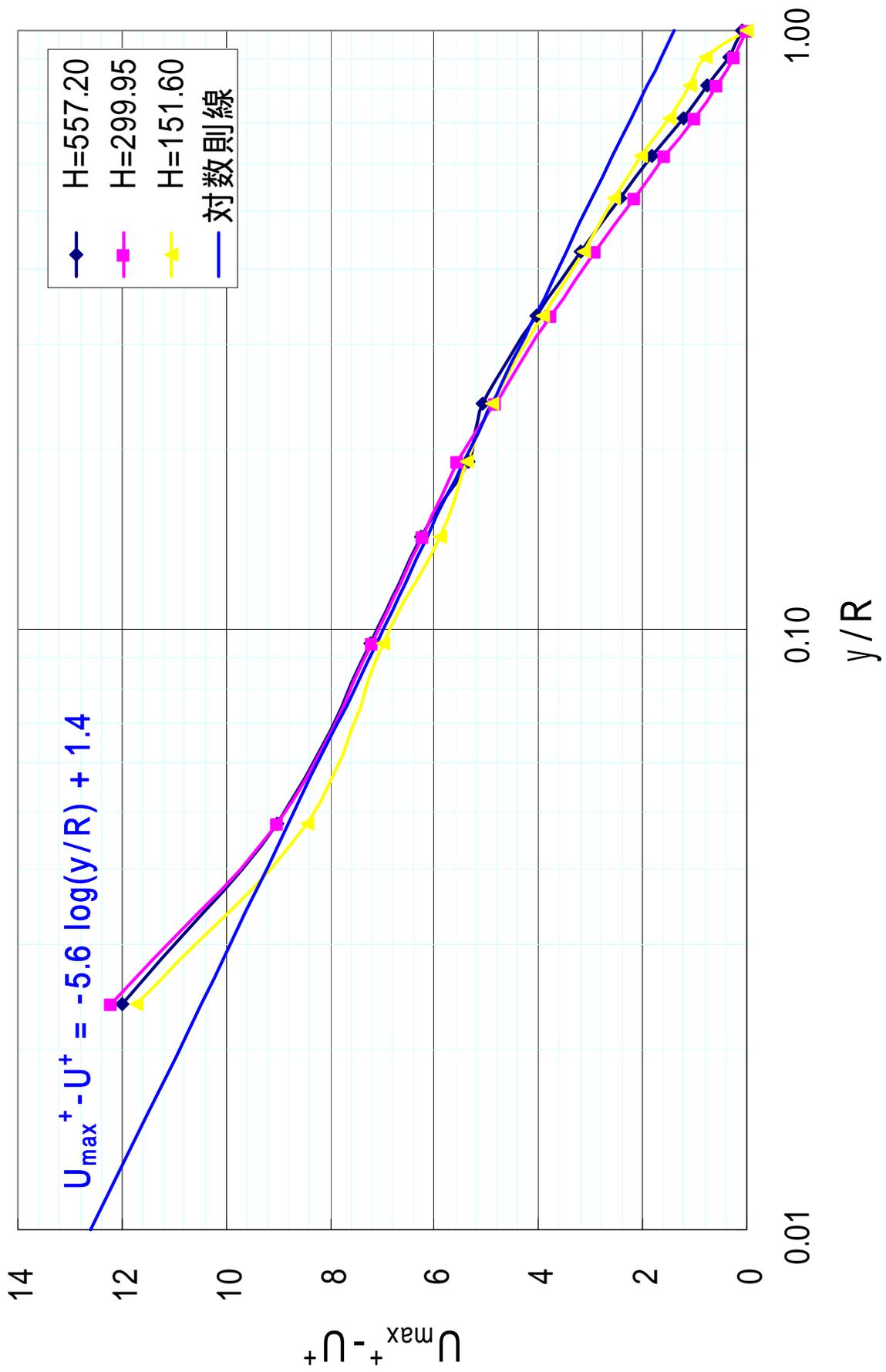


图8 对数則

6.4 速度欠損則

両対数グラフに $U_{\max}^+ - \bar{U}^+$ vs. r/R をプロットし、速度欠損則の対数則を求める。
式(45)より、

$$(45) \Leftrightarrow \frac{U_{\max} - \bar{U}}{u_\tau} = A \left(1 - \frac{y}{R}\right)^p = A \left(\frac{r}{R}\right)^p$$

であるので、グラフより係数 A および指数 p を決定する。
図 9 より、

$$\frac{U_{\max} - \bar{U}}{u_\tau} = 7.2 \cdot \left(\frac{r}{R}\right)^{1.4}$$

とした。一般的な実験値では $A = 7 \sim 8$ 、 $p = 1.5 \sim 2$ が得られているが、今回の実験では係数 A は一致したが、指数 p の値は少し小さい値となった。

また、流量が $H_Q = 557.60$ [mmH₂O] および $H_Q = 299.95$ [mmH₂O] の測定値では速度欠損式に相関していることが伺えるが、 $H_Q = 151.20$ [mmH₂O] の測定値では中心部ほど近似式から外れている。ただし、各式とも $0.3 \leq r/R \leq 0.8$ の範囲では測定値とよく一致している。

6.5 レイノルズ応力

図 10 に示す 2 次元せん断乱流を考える。y 軸に垂直な面には、せん断応力 τ が作用しており、この τ が分子粘性によるもの τ_l と乱れ運動に基づくもの τ_t との和として表わされる。

$$\tau = \tau_l + \tau_t = \underbrace{\mu \frac{d\bar{u}}{dy}}_{\text{分子粘性によるせん断応力}} - \underbrace{\rho \overline{u'v'}}_{\text{乱れ運動によるせん断応力}} \quad (60)$$

つぎに、図 10 に示すように、考えている面を横切る乱流渦を考える。この渦運動により、面の下から上へ向かう運動 ($v > 0$) では、下部の低速流体塊が上部へ輸送され、逆に面の上から下へ向かう運動 ($v' < 0$) では、上部の速い流体塊が下部へ輸送される。この結果、面の上部の流体には減速する力が、下部の流体には加速する力が働き、面にせん断応力が作用する。これを定量的に表わすため、考えている面を通過する運動量を求めると、y 方向の速度 v' により単位面積単位時間当たり x 方向の運動量は、 $\rho(\bar{u} + u')v'$ だけ面の下から上へ輸送される。この量の時間平均は $\rho \overline{u'v'}$ となる。よって、面の上部の流体の運動量は、単位時間当たり $\rho \overline{u'v'}$ だけ増加する。せん断応力は、面の上側の流体を減速する向きに働くとき、すなわち上側流体の x 方向運動量を減らすとき正にとる。したがって、 $-\tau_t = \rho \overline{u'v'}$ となり、全せん断応力は、式(60)のように表わされる。

運動方程式においても式(13)のように Navier-Stokes 方程式の流速と圧力をそれらの平均値で置き換えたものにレイノルズ応力項を加えた形になっている。

レイノルズ方程式の導出、および対数側の導出については第 2 章の p.3,4 および p.5 ~ 8 を参照していただきたい。

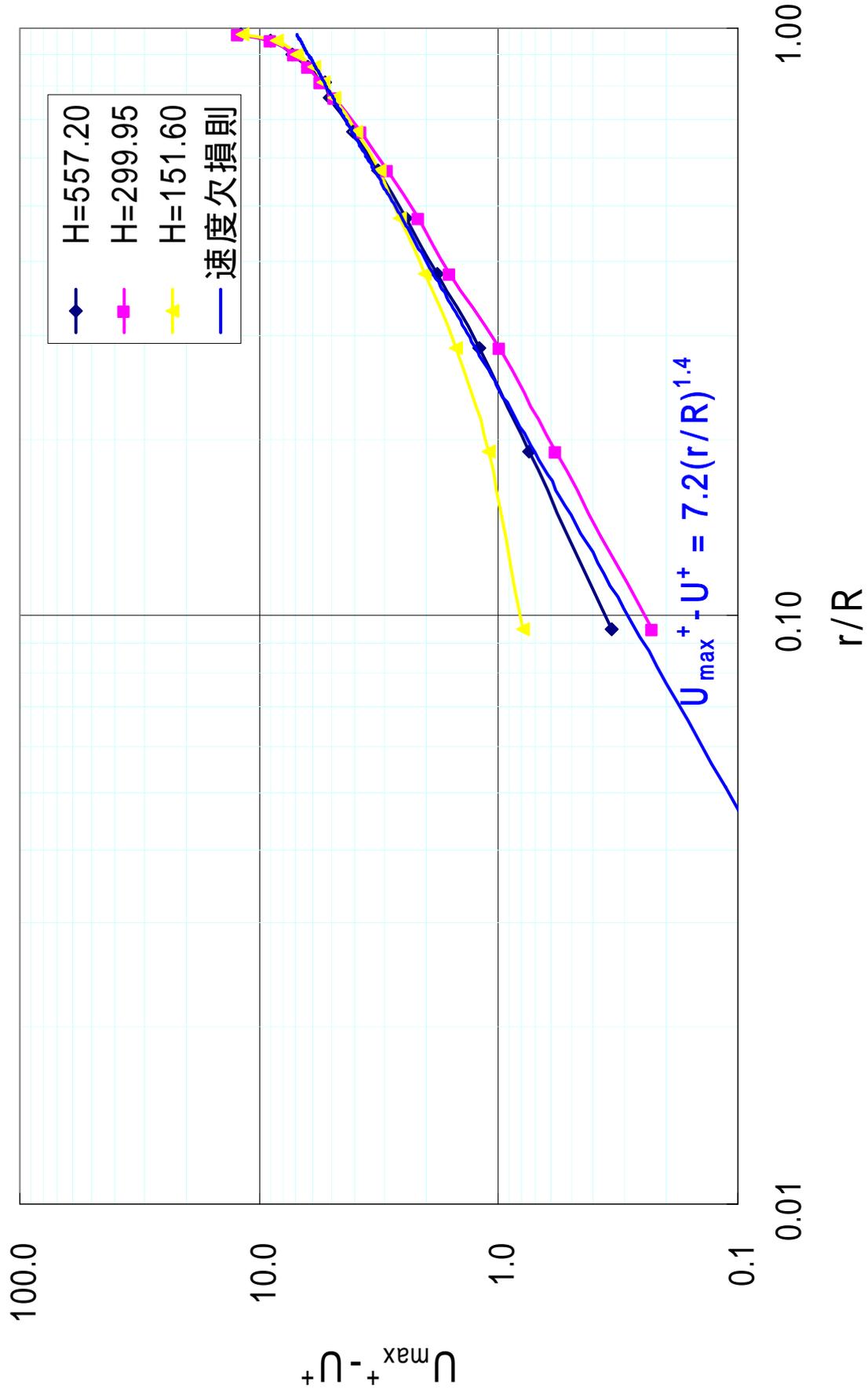


图9 速度欠损则

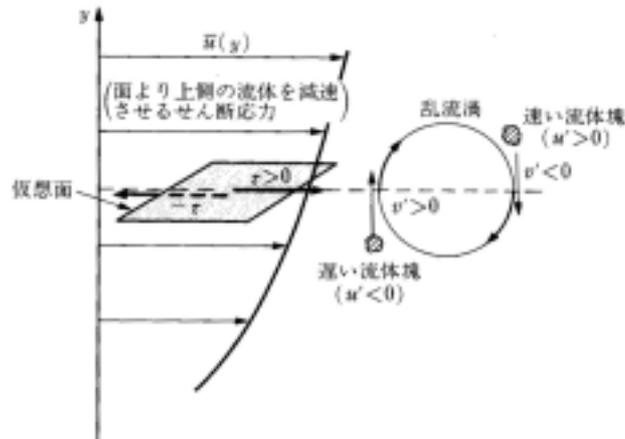


図 10 乱流渦によるせん断応力の発生

6.6 層流と乱流の相違点

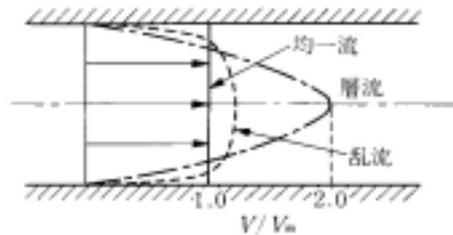


図 11 管内速度分布の例

層流状態では、流れに作用するせん断応力は分子粘性による応力であるが、乱流状態では分子粘性による応力に加えて流れ運動に伴うせん断応力(レイノルズ応力)が発生する点で異なる。

その最大流速を比較すると、層流ではポアズイコ流の式より、(p.6.7 参照)

$$\mu \left(\frac{d^2 v_z}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dv_z}{dr} \right) = \frac{dp}{dz}$$

$$\Leftrightarrow v_z = \frac{1}{4\mu} \frac{dp}{dz} r^2 - \frac{1}{4\mu} \frac{dp}{dz} R^2 = -\frac{1}{4\mu} \frac{dp}{dz} (R^2 - r^2) \quad (27)$$

上式の数値分布を円管断面全体にわたって積分すれば、流量 Q を求めることができる

$$Q = \iint_A v_z dr \cdot r d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^R -\frac{1}{4\mu} \frac{dp}{dz} (R^2 r - r^3) dr$$

$$= -\frac{1}{4\mu} \frac{dp}{dz} \int_0^{2\pi} \left[\frac{1}{2} R^2 r^2 - \frac{1}{4} r^4 \right]_0^R d\theta$$

$$= -\frac{\pi}{8\mu} \frac{dp}{dz} R^4$$

流量 Q を断面積 A で割れば、平均流速 U_m が得られる。

$$U_m = \frac{Q}{A} = -\frac{\pi}{8\mu} \frac{dp}{dz} R^4 / \pi R^2 = -\frac{1}{8\mu} \frac{dp}{dz} R^2 \quad (61)$$

また，管中心の最大流速 V_{\max} は，速度分布の式(27)に $r = 0$ を代入して，

$$U_{\max} = -\frac{1}{4\mu} \frac{dp}{dz} R^2 = 2U_m$$

$$\Leftrightarrow \frac{U_{\max}}{U_m} = 2 \quad (62)$$

一方，乱流では，流量を対数則で用いると，

$$\begin{aligned} Q &= 2\pi \int_0^R u(R-y) dy \\ &= 2\pi \int_0^R (R-y) u_r \left(2.4 \ln \frac{u_r y}{\nu} + 5.3 \right) dy \\ &= 2\pi u_r \int_0^R \left(2.4R \ln \frac{u_r y}{\nu} + 5.3R - 2.4y \ln \frac{u_r y}{\nu} - 5.3y \right) dy \\ &= 4.8\pi u_r \int_0^R \left(R \ln \frac{u_r y}{\nu} - y \ln \frac{u_r y}{\nu} \right) dy + 10.6\pi u_r \int_0^R (R-y) dy \\ &= 4.8\pi u_r \int_0^R \left\{ Ry' \ln \frac{u_r y}{\nu} - \left(\frac{1}{2} y^2 \right)' \ln \frac{u_r y}{\nu} \right\} dy + 10.6\pi u_r \left[Ry - \frac{1}{2} y^2 \right]_0^R \\ &= 4.8\pi u_r \left[Ry \ln \frac{u_r y}{\nu} - \frac{1}{2} y^2 \ln \frac{u_r y}{\nu} \right]_0^R - 4.8\pi u_r \int_0^R \left(Ry \frac{1}{y} - \frac{1}{2} y^2 \frac{1}{y} \right) dy + 5.3\pi u_r R^2 \\ &= 4.8\pi u_r \left(R^2 \ln \frac{u_r R}{\nu} - \frac{1}{2} R^2 \ln \frac{u_r R}{\nu} \right) - 4.8\pi u_r \int_0^R \left(R - \frac{1}{2} y \right) dy + 5.3\pi u_r R^2 \quad (\text{ロピタルの定理}) \\ &= 2.4\pi u_r R^2 \ln \frac{u_r R}{\nu} - 4.8\pi u_r \left[Ry - \frac{1}{4} y^2 \right]_0^R + 5.3\pi u_r R^2 \\ &= 2.4\pi u_r R^2 \ln \frac{u_r R}{\nu} - 4.8\pi u_r \cdot \frac{3}{4} R^2 + 5.3\pi u_r R^2 \\ &= \pi R^2 u_r \left(2.4 \ln \frac{u_r R}{\nu} + 1.7 \right) \end{aligned}$$

よって，平均流速 U_m は次式のようになる．

$$U_m = \frac{Q}{\pi R^2} = u_r \left(2.4 \ln \frac{u_r R}{\nu} + 1.7 \right)$$

また，最大流速は， $U_{\max} = u_r \left(2.4 \ln \frac{u_r R}{\nu} + 5.3 \right)$ より，

$$\frac{U_{\max}}{U_m} = \left(2.4 \ln \frac{u_r R}{\nu} + 5.3 \right) / \left(2.4 \ln \frac{u_r R}{\nu} + 1.7 \right) \quad (63)$$

今回の実験では， $u_r R / \nu = 870 \sim 1420$ であったので，

$$\frac{U_{\max}}{U_m} \approx 1.2 \quad (64)$$

したがって、式(62)と(64)の比較より、同じ流量の流体が層流から乱流へと変化した場合、その最大流速は約 40%低下する。

層流状態では流体が平均速度の 2 倍の流速にあたる運動エネルギーを持っているのに対し、乱流では運動エネルギーが減少しているようにも思えるが、そうではない。乱流では前述のレイノルズ応力によって渦が発生し、流体が不規則な運動をする。しかし、今回用いた対数則などの乱流解析では、その流速を時間平均として取り扱うため、微小な流体運動は無視される。そのため最大流速が減少している。したがって、最大流速の相違点、つまりは流れの式の相違はレイノルズ応力の有無が原因であるといえる。

また、図 11 でも分かるように、壁面付近では層流・乱流共に同じような流速となるが、これは、壁のごく近くではこの渦運動が壁面により妨げられるので、乱れ運動が抑制されるためである。かわりに、ここには粘性の影響を強く受ける粘性底層という薄い層が形成され、乱流状態でも壁面付近については層流に近い流れとなる。

6.7 空気 水

この実験装置でレイノルズ数を合わせて試験流体を空気から水に替えたとき、体積流量と圧力損失は約何倍になるかを考える。

レイノルズ数を等しくするので、

$$\text{Re} = \frac{U_{\text{air}} D}{\nu_{\text{air}}} = \frac{U_{\text{water}} D}{\nu_{\text{water}}} \quad (65)$$

$\nu_{\text{air}} = 1.4 \times 10^{-5} [\text{m}^2/\text{s}]$, $\nu_{\text{water}} = 1.3 \times 10^{-6} [\text{m}^2/\text{s}]$ とすると、式(65)より、

$$\frac{U_{\text{water}}}{U_{\text{air}}} = \frac{\nu_{\text{water}}}{\nu_{\text{air}}} = 0.093 \quad (66)$$

一方、体積流量 Q は、

$$Q = A \cdot U$$

であるので、試験流体を空気から水に替えたときの体積流量の変化量は、

$$\frac{Q_{\text{water}}}{Q_{\text{air}}} = \frac{A \cdot U_{\text{water}}}{A \cdot U_{\text{air}}} = 0.093 \approx \frac{1}{11}$$

また圧力損失は、式(4)より、

$$(4) \Leftrightarrow P = \tau_w \frac{2L}{R} \quad (67)$$

ところで、「円管(管長 l , 管径 $D=2R$)の圧力損失 p は、表面積 $\pi D l$ と動圧 $\rho U_m^2 / 2$ に比例し、管断面積 $\pi D^2 / 4$ に反比例する」と考えられるので、次式を得る。

$$p \propto \frac{\pi D L \cdot \frac{1}{2} \rho U_m^2}{\pi \frac{D^2}{4}}$$

よって、その比例定数を λ とすれば、

$$p = \lambda \frac{L}{D} \frac{\rho U_m^2}{2} \quad (67)$$

と表せる(損失特性の式)。ここで、 λ は Darcy-Weisbach の管摩擦係数という無次元数である。

層流では、式(67)を式(61)に代入して、

$$U_m = \frac{1}{8\mu} \frac{\lambda}{D} \frac{\rho U_m^2 D^2}{2} \frac{D^2}{4}$$

$$\Leftrightarrow \lambda = 64 \cdot \frac{\nu}{U_m D}$$

$$\therefore \lambda = \frac{64}{\text{Re}} \quad (68)$$

乱流では、Blasius の式より、

$$\lambda = 0.3164 \text{Re}^{-0.25} \quad (3 \times 10^3 \leq \text{Re} \leq 1 \times 10^5) \quad (69)$$

であるので、管摩擦係数はともにレイノルズ数に依存しているといえるので、

$$\lambda_{\text{air}} = \lambda_{\text{water}} \quad (70)$$

よって、式(67)より、式(70)を考慮して、

$$\frac{P_{\text{water}}}{P_{\text{air}}} = \frac{\lambda \frac{L}{D} \frac{\rho_{\text{water}} U_{\text{water}}^2}{2}}{\lambda \frac{L}{D} \frac{\rho_{\text{air}} U_{\text{air}}^2}{2}} = \frac{\rho_{\text{water}} U_{\text{water}}^2}{\rho_{\text{air}} U_{\text{air}}^2} \quad (71)$$

また、 $\rho_{\text{air}} = 1.2 \text{ [kg/m}^3\text{]}$ 、 $\rho_{\text{water}} = 1000 \text{ [kg/m}^3\text{]}$ とすると、

$$\frac{\rho_{\text{water}}}{\rho_{\text{air}}} = \frac{1000}{1.2} = 830 \quad (72)$$

よって、式(71)に式(66)および式(72)を代入して、

$$\frac{P_{\text{water}}}{P_{\text{air}}} = \frac{\rho_{\text{water}} U_{\text{water}}^2}{\rho_{\text{air}} U_{\text{air}}^2} = 830 \times 0.093^2 = 7.2$$

したがって以上より、この実験装置でレイノルズ数を合わせて試験流体を空気から水に替えると、体積流量は約1/11倍に、圧力損失は約7.2倍となる。

7. 結言

今回の実験で、円管内乱流の平均速度分布を測定することで、解析の困難な乱流状態において、指数法則、壁法則、および速度欠損則で説明可能であることが確認できた。それと同時に、これらの法則式は円管内において、式によって壁面付近が説明しきれないことや、中心付近が説明しきれないことも確認できたので、これら諸法則を使用する場合にはその適応範囲を確認する必要があるといえる。

今回の実験で得られた各法則の式は次の通りである。

$$\begin{aligned} \text{指数則;} \quad \frac{\bar{U}}{U_{\max}} &= \left(\frac{y}{R}\right)^{0.162} && \left(0.04 < \frac{y}{R}\right) \\ \text{対数則;} \quad U^+ &= 5.6 \log y^+ + 5.3 && (40 < y^+ < 500) \\ \frac{U_{\max} - \bar{u}}{u_\tau} &= -5.6 \log \left(\frac{y}{R}\right) + 1.4 && \left(0.04 < \frac{y}{R} < 0.4\right) \\ \text{速度欠損則;} \quad \frac{U_{\max} - \bar{U}}{u_\tau} &= 7.2 \cdot \left(\frac{r}{R}\right)^{1.4} && \left(\frac{r}{R} < 0.9\right) \end{aligned}$$

ただし、適応範囲は目視で判断した。

また、管内流の流速は層流ではポワズイユ流の二次関数となり、最大流速が平均流速の2倍となるのに対し、乱流では最大流速が平均流速の約1.2倍と流速の変化が小さく、より一様な分布であることも計算上で確認した。この原因としては、乱流状態となるとナビエ-ストークスの運動方程式を見ても分かるように、流体に分子運動に起因する応力であるレイノルズ応力が作用するため、流体が微小な渦運動を起こし、時間平均の見た目の運動エネルギーが減少するためであると結論付けた。

参考文献

- 1) 中林功一・伊藤基之・鬼頭修己 共著；流体力学の基礎(1)，コロナ社（2002）
- 2) 中林功一・伊藤基之・鬼頭修己 共著；流体力学の基礎(2)，コロナ社（2002）
- 3) 日野幹雄 著；流体力学，朝倉書店（1974）