１． 目的

配管は，家庭，ビルおよび工場へのガスまたは水の輸送，ならびに工場やプラントでの原料の輸送などに用いられており，我々の生活を支える重要な機器の一つである．このように用途が多様な配管において，設計上最も重要なのが円管内流れ（円管流）の（圧力）損失と特性である．例えば，管径や管長に応じて流動損失が計算できれば，必要な送風機やポンプを決定することができる．また．矩形配管も円管流の損失特性を基礎に補修して設計される．本実験では，円管流の圧力損失を測定し，その結果を管摩擦係数とレイノルズ数の関係（相似則）において整理する．また，熱線流速計により，層流域，遷移域，乱流域における速度波形を観察および，水素気泡での流れの可視化を観察する．

２． 基礎事項の説明

２．１ 助走区間の流れ

管の流入端からかなり下流になると速度分布は管軸方向に変化しなくなるが（完全発達域），それまでの流れの様子は流入端の形状に影響される（助走区間）．助走区間を過ぎると流れは完全に発達した層流または乱流の速度分布となり，圧力ヘッドも一定の割合で減少する（図１参照）．助走区間 L は，層流の場合には，Bender によれば，$L = 0.0566 d\,\mathrm{Re}$（ｄ；管直径，$\mathrm{Re} = V_m d/\nu$），乱流の場合には，Richmann と Azad によると，$L \cong 50d$ であるとされている．

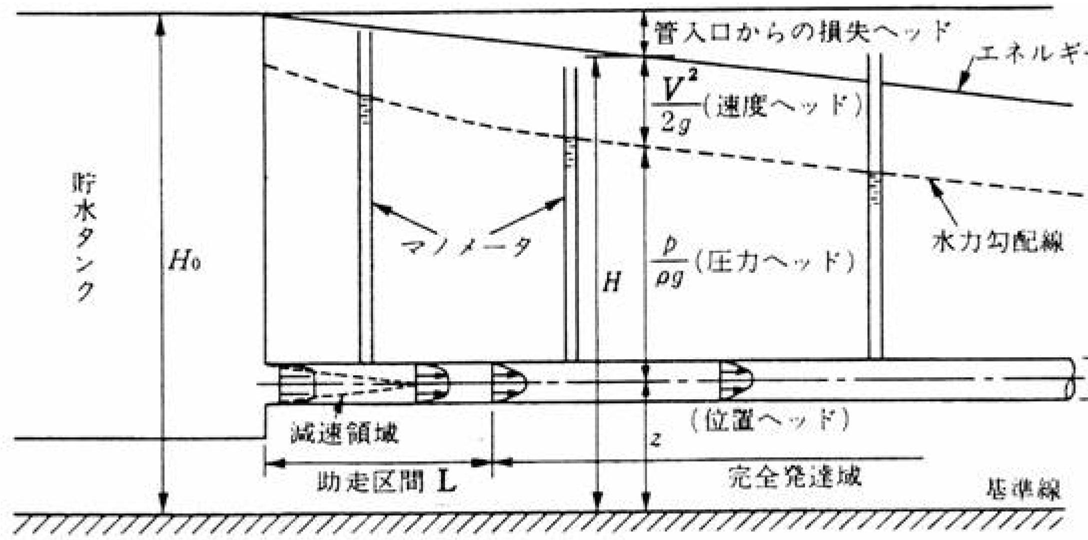


図１ 管路に沿う圧力とエネルギーの変化

２．２ 層流の理論式（Hargen-Poiseuille の式）

円管内の流れにおいて，質量保存則と運動量保存則が成り立つので，連続の式とNavier-Stokes の運動方程式（以下，NS 式）を用いて Hagen-Poiseuille 流れの支配方程式を求める．

連続の式は，$\dfrac{\partial \rho}{\partial t}+\dfrac{\partial}{\partial x}(\rho u)+\dfrac{\partial}{\partial y}(\rho v)+\dfrac{\partial}{\partial z}(\rho w)=0$

流れが非圧縮流れであれば $\rho = const$ より，

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}=0 \qquad ———（１）$$

NS 式は成分表記すると，

$$\frac{Du}{Dt}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}+\nu\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right)+\frac{\nu}{3}\cdot\frac{\partial \Theta}{\partial x}+X$$

$$\frac{Dv}{Dt}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y}+\nu\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial z^2}\right)+\frac{\nu}{3}\cdot\frac{\partial \Theta}{\partial y}+Y$$

$$\frac{Dw}{Dt}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z}+\nu\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial z^2}\right)+\frac{\nu}{3}\cdot\frac{\partial \Theta}{\partial z}+Z$$

ただし，$\dfrac{D}{Dt}=\dfrac{\partial}{\partial t}+u\dfrac{\partial}{\partial x}+v\dfrac{\partial}{\partial y}+w\dfrac{\partial}{\partial z}$

$\Theta=\dfrac{\partial u}{\partial x}+\dfrac{\partial v}{\partial y}+\dfrac{\partial w}{\partial z}$

X，Y，Z ；体積力

ベクトル表記すると，

$$\frac{D}{Dt}\boldsymbol{v}=-\frac{1}{\rho}\nabla p+\nu\nabla^2\boldsymbol{v}+\frac{\nu}{3}\nabla\Theta+\boldsymbol{F} \qquad ———（２）$$

ただし，$F\,(X,Y,Z)$；体積力ベクトル

流れが非圧縮性流れであったとき，連続の式（１）より $\Theta=\dfrac{\partial u}{\partial x}+\dfrac{\partial v}{\partial y}+\dfrac{\partial w}{\partial z}=0$．

また，自由表面を持たないので，流れが静止している場合，

$$\boldsymbol{v}=0=-\frac{1}{\rho}\nabla\, p_s+\boldsymbol{F} \qquad （p_s；静圧）$$

$$\Leftrightarrow \boldsymbol{F}=\frac{1}{\rho}\nabla\, p_s$$

これらを NS 式（２）に代入すると，

$$\frac{D}{Dt}\boldsymbol{v}=-\frac{1}{\rho}\nabla(p-p_s)+\nu\nabla^2\boldsymbol{v}$$

$$\Leftrightarrow \frac{D}{Dt}\boldsymbol{v}=-\frac{1}{\rho}\nabla p'+\nu\nabla^2\boldsymbol{v} \qquad (\ p'\equiv p-p_s)$$

$p'\rightarrow p$ と書き換えると

$$\Leftrightarrow \frac{D}{Dt}\boldsymbol{v}=-\frac{1}{\rho}\nabla p+\nu\nabla^2\boldsymbol{v}$$ ＜非圧縮･自由表面なしの NS 式＞ ———（３）

定常・非圧縮の NS 式：$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t}+(\mathbf{v}\cdot\nabla)\mathbf{v}=-\frac{1}{\rho}\nabla p+\nu\nabla^2\mathbf{v}$　を,

$$\begin{cases} r\text{；半径方向座標} \\ \theta\text{；円周方向座標} \\ z\text{；軸方向座標} \end{cases}$$

として，円筒座標系表示する.

まず，直曲座標表記は

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \\ z = z \end{cases}$$

$\Rightarrow$

$$\mathbf{r}=\cos\theta\mathbf{i}+r\sin\theta\mathbf{j}+z\mathbf{k}$$
$$\mathbf{r_r}=\cos\theta\mathbf{i}+\sin\theta\mathbf{j}$$
$$\mathbf{r_\theta}=-r\sin\theta\mathbf{i}+r\cos\theta\mathbf{j}$$
$$\mathbf{r_z}=z\mathbf{k}$$

ここで，$(\mathbf{r_r},\mathbf{r_\theta})=(\mathbf{r_\theta},\mathbf{r_z})=(\mathbf{r_z},\mathbf{r_r})=0$　である.

ベクトル $\mathbf{r_r}$，$\mathbf{r_\theta}$，$\mathbf{r_z}$ の長さｈは,

$$h_r=|\mathbf{r_r}|=1,\quad h_\theta=|\mathbf{r_\theta}|=r,\quad h_z=1$$

したがって，ｒ，θ, z 方向の単位ベクトルは

$$\mathbf{e_r}=\frac{1}{h_r}\mathbf{r_r}=\mathbf{r_r},\quad \mathbf{e_\theta}=\frac{1}{h_\theta}\mathbf{r_\theta}=\frac{1}{r}\mathbf{r_\theta},\quad \mathbf{e_z}=\frac{1}{h_z}\mathbf{r_z}=\mathbf{r_z}$$

であり，各方向ベクトルの各方向微分は次のようになる.

$$\frac{\partial \mathbf{e_r}}{\partial r}=0,\quad \frac{\partial \mathbf{e_r}}{\partial \theta}=\mathbf{e_\theta},\quad \frac{\partial \mathbf{e_r}}{\partial z}=0$$
$$\frac{\partial \mathbf{e_\theta}}{\partial r}=0,\quad \frac{\partial \mathbf{e_\theta}}{\partial \theta}=-\mathbf{e_r},\quad \frac{\partial \mathbf{e_\theta}}{\partial z}=0$$
$$\frac{\partial \mathbf{e_z}}{\partial r}=0,\quad \frac{\partial \mathbf{e_z}}{\partial \theta}=0,\quad \frac{\partial \mathbf{e_z}}{\partial z}=0$$

また，ハミルトンのの演算子∇は,

$$\nabla=\mathbf{e_r}\frac{\partial}{\partial r}+\mathbf{e_\theta}\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \theta}+\mathbf{e_z}\frac{\partial}{\partial z}$$

で表現される．速度ベクトルを,

$$\mathbf{v}=\mathbf{e_r}v_r+\mathbf{e_\theta}v_\theta+\mathbf{e_z}v_z$$

として，以下に計算を行う.

$$\frac{\partial v}{\partial t}=\mathbf{e_r}\frac{\partial v_r}{\partial t}+\mathbf{e_\theta}\frac{\partial v_\theta}{\partial t}+\mathbf{e_z}\frac{\partial v_z}{\partial t}$$

$$\nabla p=\mathbf{e_r}\frac{\partial p}{\partial r}+\mathbf{e_\theta}\frac{1}{r}\frac{\partial p}{\partial \theta}+\mathbf{e_z}\frac{\partial p}{\partial z}$$

$$\mathbf{v}\cdot\nabla=\left(\mathbf{e_r}v_r+\mathbf{e_\theta}v_\theta+\mathbf{e_z}v_z\right)\cdot\left(\mathbf{e_r}\frac{\partial}{\partial r}+\mathbf{e_\theta}\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}+\mathbf{e_z}\frac{\partial}{\partial z}\right)$$

$$=v_r\frac{\partial}{\partial r}+\frac{v_\theta}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}+v_z\frac{\partial}{\partial z}$$

$$\because\left(\begin{array}{l}\mathbf{e_r}\cdot\mathbf{e_r}=\mathbf{e_\theta}\cdot\mathbf{e_\theta}=\mathbf{e_z}\cdot\mathbf{e_z}=1\\ \mathbf{e_r}\cdot\mathbf{e_\theta}=\mathbf{e_\theta}\cdot\mathbf{e_z}=\mathbf{e_z}\cdot\mathbf{e_r}=0\end{array}\right.$$

$$(\mathbf{v}\cdot\nabla)\mathbf{v}=\left(v_r\frac{\partial}{\partial r}+\frac{v_\theta}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}+v_z\frac{\partial}{\partial z}\right)\cdot\left(\mathbf{e_r}v_r+\mathbf{e_\theta}v_\theta+\mathbf{e_z}v_z\right)$$

$$=\mathbf{e_r}v_r\frac{\partial v_r}{\partial r}+\mathbf{e_\theta}v_r\frac{\partial v_\theta}{\partial r}+\mathbf{e_z}v_r\frac{\partial v_z}{\partial r}$$

$$+\frac{\partial\mathbf{e_r}}{\partial\theta}\frac{v_\theta}{r}v_r+\mathbf{e_r}\frac{v_\theta}{r}\frac{\partial v_r}{\partial\theta}+\frac{\partial\mathbf{e_\theta}}{\partial\theta}\frac{{v_\theta}^2}{r}+\mathbf{e_\theta}\frac{v_\theta}{r}\frac{\partial v_\theta}{\partial\theta}+\frac{\partial\mathbf{e_z}}{\partial\theta}v_rv_z+\mathbf{e_z}\frac{v_\theta}{r}\frac{\partial v_z}{\partial\theta}$$

$$+\mathbf{e_r}v_z\frac{\partial v_r}{\partial z}+\mathbf{e_\theta}v_z\frac{\partial v_\theta}{\partial z}+\mathbf{e_z}v_z\frac{\partial v_z}{\partial z}$$

$$=\mathbf{e_r}\left(v_r\frac{\partial v_r}{\partial r}+\frac{v_\theta}{r}\frac{\partial v_r}{\partial\theta}-\frac{{v_\theta}^2}{r}+v_z\frac{\partial v_r}{\partial z}\right)$$

$$+\mathbf{e_\theta}\left(v_r\frac{\partial v_\theta}{\partial r}+\frac{v_rv_\theta}{r}+\frac{v_\theta}{r}\frac{\partial v_\theta}{\partial\theta}-\frac{{v_\theta}^2}{r}+v_z\frac{\partial v_\theta}{\partial z}\right)$$

$$+\mathbf{e_z}\left(v_r\frac{\partial v_z}{\partial r}+\frac{v_\theta}{r}\frac{\partial v_z}{\partial\theta}+v_z\frac{\partial v_z}{\partial z}\right)$$

$$\nabla^2=\left(\mathbf{e_r}\frac{\partial}{\partial r}+\mathbf{e_\theta}\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}+\mathbf{e_z}\frac{\partial}{\partial z}\right)\cdot\left(\mathbf{e_r}\frac{\partial}{\partial r}+\mathbf{e_\theta}\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}+\mathbf{e_z}\frac{\partial}{\partial z}\right)$$

$$=\underline{\underline{(\mathbf{e_r}\cdot\mathbf{e_r})\frac{\partial^2}{\partial r^2}}}+\left(\mathbf{e_r}\cdot\frac{\partial\mathbf{e_r}}{\partial r}\right)\frac{\partial}{\partial r}+(\mathbf{e_r}\cdot\mathbf{e_\theta})\frac{1}{r}\frac{\partial^2}{\partial r\partial\theta}+(\mathbf{e_r}\cdot\mathbf{e_\theta})\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\right)\cdot\frac{\partial}{\partial\theta}$$

$$+\left(\mathbf{e_r}\cdot\frac{\partial\mathbf{e_\theta}}{\partial r}\right)\frac{1}{r}\frac{\partial^2}{\partial r\partial\theta}+(\mathbf{e_r}\cdot\mathbf{e_z})\frac{\partial^2}{\partial r\partial z}+\left(\mathbf{e_r}\cdot\frac{\partial\mathbf{e_z}}{\partial r}\right)\frac{\partial}{\partial z}$$

$$+(\mathbf{e_\theta}\cdot\mathbf{e_r})\frac{1}{r}\frac{\partial^2}{\partial r\partial\theta}+\underline{\underline{\left(\mathbf{e_\theta}\cdot\frac{\partial\mathbf{e_r}}{\partial\theta}\right)\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}}}+\underline{\underline{(\mathbf{e_\theta}\cdot\mathbf{e_\theta})\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}}}+(\mathbf{e_\theta}\cdot\mathbf{e_\theta})\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{1}{r}\right)\cdot\frac{\partial}{\partial\theta}$$

$$+\left(\mathbf{e_\theta}\cdot\frac{\partial\mathbf{e_\theta}}{\partial\theta}\right)\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}+(\mathbf{e}_\theta\cdot\mathbf{e_z})\frac{1}{r}\frac{\partial^2}{\partial\theta\partial z}+\left(\mathbf{e_\theta}\cdot\frac{\partial\mathbf{e_z}}{\partial\theta}\right)\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}$$

$$+(\mathbf{e}_z\cdot\mathbf{e_r})\frac{\partial^2}{\partial r\partial z}+\left(\mathbf{e}_z\cdot\frac{\partial\mathbf{e_r}}{\partial z}\right)\frac{\partial}{\partial r}+(\mathbf{e}_z\cdot\mathbf{e_\theta})\frac{1}{r}\frac{\partial^2}{\partial\theta\partial z}+(\mathbf{e}_z\cdot\mathbf{e_\theta})\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{r}\right)\cdot\frac{\partial}{\partial\theta}$$

$$+\left(\mathbf{e}_z\cdot\frac{\partial\mathbf{e_\theta}}{\partial z}\right)\frac{1}{r}\frac{\partial^2}{\partial\theta\partial z}+\underline{\underline{(\mathbf{e}_z\cdot\mathbf{e_z})\frac{\partial^2}{\partial z^2}}}+\left(\mathbf{e}_z\cdot\frac{\partial\mathbf{e_z}}{\partial z}\right)\frac{\partial}{\partial z}$$

$$=\frac{\partial^2}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

$$\nabla^2 \cdot \mathbf{v} = \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \cdot \left(\mathbf{e_r} v_r + \mathbf{e_\theta} v_\theta + \mathbf{e_z} v_z \right)$$

$$= \mathbf{e_r} \frac{\partial^2 v_r}{\partial r^2} + \mathbf{e_\theta} \frac{\partial^2 v_\theta}{\partial r^2} + \mathbf{e_z} \frac{\partial^2 v_z}{\partial r^2} + \mathbf{e_r} \frac{1}{r}\frac{\partial v_r}{\partial r} + \mathbf{e_\theta} \frac{1}{r}\frac{\partial v_\theta}{\partial r} + \mathbf{e_z} \frac{1}{r}\frac{\partial v_z}{\partial r} - \mathbf{e_r} \frac{v_r}{r^2} + \mathbf{e_\theta} \frac{1}{r^2}\frac{\partial v_r}{\partial \theta} + \mathbf{e_\theta} \frac{1}{r^2}\frac{\partial v_r}{\partial \theta} + \mathbf{e_r} \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 v_r}{\partial \theta^2}$$

$$- \mathbf{e_\theta} \frac{v_\theta}{r^2} - \mathbf{e_r} \frac{1}{r^2}\frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} - \mathbf{e_r} \frac{1}{r^2}\frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \mathbf{e_\theta} \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 v_\theta}{\partial \theta^2} + \mathbf{e_z} \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 v_\theta}{\partial z^2} + \mathbf{e_r} \frac{\partial^2 v_r}{\partial z^2} + \mathbf{e_\theta} \frac{\partial^2 v_\theta}{\partial z^2} + \mathbf{e_z} \frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2}$$

$$= \mathbf{e_r} \left(\frac{\partial^2 v_r}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial v_r}{\partial r} - \frac{v_r}{r^2} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 v_r}{\partial \theta^2} - \frac{2}{r^2}\frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial^2 v_r}{\partial z^2} \right)$$

$$+ \mathbf{e_\theta} \left(\frac{\partial^2 v_\theta}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial v_\theta}{\partial r} + \frac{2}{r^2}\frac{\partial v_r}{\partial \theta} - \frac{v_\theta}{r^2} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 v_\theta}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 v_\theta}{\partial z^2} \right)$$

$$+ \mathbf{e_z} \left(\frac{\partial^2 v_z}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial v_z}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 v_z}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2} \right)$$

$$= \mathbf{e_r} \left\{ \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) v_r - \frac{v_r}{r^2} - \frac{2}{r^2}\frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} \right\}$$

$$+ \mathbf{e_\theta} \left\{ \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) v_\theta + \frac{2}{r^2}\frac{\partial v_r}{\partial \theta} - \frac{v_\theta}{r^2} \right\}$$

$$+ \mathbf{e_z} \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) v_z$$

$$= \mathbf{e_r} \left(\nabla^2 v_r - \frac{v_r}{r^2} - \frac{2}{r^2}\frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} \right) + \mathbf{e_\theta} \left(\nabla^2 v_\theta - \frac{v_\theta}{r^2} + \frac{2}{r^2}\frac{\partial v_r}{\partial \theta} \right) + \mathbf{e_z} \nabla^2 v_z$$

ただし，

$$\frac{\partial^2 (\mathbf{e_r} v_r)}{\partial \theta^2} = \frac{\partial}{\partial \theta} \cdot \frac{\partial (\mathbf{e_r} v_r)}{\partial \theta} = \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\mathbf{e_\theta} v_r + \mathbf{e_r} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} \right) = -\mathbf{e_r} v_r + \mathbf{e_\theta} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} + \mathbf{e_\theta} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} + \mathbf{e_r} \frac{\partial^2 v_r}{\partial \theta^2}$$

$$\frac{\partial^2 (\mathbf{e_\theta} v_\theta)}{\partial \theta^2} = \frac{\partial}{\partial \theta} \cdot \frac{\partial (\mathbf{e_\theta} v_\theta)}{\partial \theta} = \frac{\partial}{\partial \theta} \left(-\mathbf{e_r} v_\theta + \mathbf{e_\theta} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} \right) = -\mathbf{e_\theta} v_\theta - \mathbf{e_r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} - \mathbf{e_r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \mathbf{e_\theta} \frac{\partial^2 v_\theta}{\partial \theta^2}$$

したがって，これらの式より，

NS 式：$\dfrac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{v} = -\dfrac{1}{\rho}\nabla p + \nu \nabla^2 \mathbf{v}$

は，次式のような形で表現できる．

r 成分：$\dfrac{\partial v_r}{\partial t} + v_r \dfrac{\partial v_r}{\partial r} + \dfrac{v_\theta}{r} \cdot \dfrac{\partial v_r}{\partial \theta} + v_z \dfrac{\partial v_r}{\partial z} - \dfrac{v_\theta{}^2}{r} = -\dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial p}{\partial r} + \nu \left(\nabla^2 v_r - \dfrac{v_r}{r^2} - \dfrac{2}{r^2} \cdot \dfrac{\partial v_\theta}{\partial \theta} \right)$ ———（4）

θ 成分：$\dfrac{\partial v_\theta}{\partial t} + v_r \dfrac{\partial v_\theta}{\partial r} + \dfrac{v_\theta}{r} \cdot \dfrac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + v_z \dfrac{\partial v_\theta}{\partial z} - \dfrac{v_r v_\theta}{r} = -\dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial p}{\partial \theta} + \nu \left(\nabla^2 v_\theta + \dfrac{2}{r^2} \cdot \dfrac{\partial v_r}{\partial \theta} - \dfrac{v_\theta}{r^2} \right)$ ——（5）

z 成分　：$\dfrac{\partial v_z}{\partial t} + v_r \dfrac{\partial v_z}{\partial r} + \dfrac{v_\theta}{r} \cdot \dfrac{\partial v_z}{\partial \theta} + v_z \dfrac{\partial v_z}{\partial z} = -\dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial p}{\partial z} + \nu \nabla^2 v_z$ ———（6）

ただし，$\nabla^2 = \dfrac{\partial}{\partial r^2} + \dfrac{1}{r} \cdot \dfrac{\partial}{\partial r} + \dfrac{1}{r^2} \cdot \dfrac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial z^2}$

また，連続の式の円管座標表示は

連続の式：$\Theta = \nabla \cdot \mathbf{v} = 0$

$$
\begin{aligned}
\nabla \cdot \mathbf{v} &= \left(\mathbf{e_r} \frac{\partial}{\partial r} + \mathbf{e_\theta} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} + \mathbf{e_z} \frac{\partial}{\partial z} \right) \cdot \left(\mathbf{e_r} v_r + \mathbf{e_\theta} v_\theta + \mathbf{e_z} v_z \right) \\
&= \frac{\partial v_r}{\partial r} + \left(\mathbf{e_\theta} \cdot \frac{\partial \mathbf{e_r}}{\partial \theta} \right) \frac{v_r}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \left(\mathbf{e_\theta} \cdot \frac{\partial \mathbf{e_\theta}}{\partial \theta} \right) \frac{v_\theta}{r} + \frac{\partial v_z}{\partial z} \\
&= \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{v_r}{r} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial v_z}{\partial z}
\end{aligned}
$$

したがって，

連続の式：$\dfrac{\partial v_r}{\partial r} + \dfrac{v_r}{r} + \dfrac{1}{r} \cdot \dfrac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \dfrac{\partial v_z}{\partial z} = 0$ ———（7）

このNS式と連続の式を用いて管内流の支配方程式を求める．

管内流の条件は，

$$
\begin{cases}
\text{非圧縮流れ；} \rho = const \\
\text{完全発達流；} \dfrac{\partial v_r}{\partial z} = \dfrac{\partial v_\theta}{\partial z} = \dfrac{\partial v_z}{\partial z} = 0 \\
\text{流れが軸対称；} \dfrac{\partial}{\partial \theta} = 0 \\
\text{一方向流れ；} v_r = v_\theta = 0 \\
\text{定常流；} \dfrac{\partial}{\partial t} = 0 \\
\text{自由表面なし}
\end{cases}
\qquad \text{———（8）}
$$

であることを仮定する．

ここで，完全発達条件については，流れが層流の場合，Benderの式より助走距離ℓ_iは，

$$\ell_i = 0.0566 \,\mathrm{Re} \cdot d$$

で表せる．（ここで，ｄ；管直径，Re；レイノルズ数＝$V_m d / \nu$）

今回は，流れが十分下流であるとし，ℓ_i以降の流れを考えるものとする．

これらの条件（８）を NS 式(4),(5),(6)および連続の式（７）に当てはめると，次の式が得られる．

NS 式第一式（４）より，$\frac{\partial p}{\partial r}=0$ ―――（９）

NS 式第三式（５）より，$0=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z}+\nu\left(\frac{\partial^2 v_z}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial v_z}{\partial r}\right)$ ―――（10）

また，

ｐに関しては，(8),(9)より $\frac{\partial p}{\partial r}=0$，$\frac{\partial p}{\partial \theta}=0$ なので，$\frac{\partial p}{\partial z}=\frac{dp}{dz}$

ｖ$_z$に関しては，(8)完全発達条件より $\frac{\partial v_z}{\partial \theta}=\frac{\partial v_z}{\partial z}=0$ なので，$\frac{\partial v_v}{\partial r}=\frac{dv_z}{dr}$

したがって，次式のような常微分方程式が得られる．

$$\mu\left(\frac{d^2 v_z}{dr^2}+\frac{1}{r}\frac{dv_z}{dr}\right)=\frac{dp}{dz}$$ ―――（11）

ところで，常微分方程式；$\frac{dy}{dx}+P(x)\cdot y=Q(x)$ の線形微分方程式の一般解は

$$y=\exp\left(-\int P(x)dx\right)\left[\int Q(x)\cdot\exp\left(P(x)dx\right)\cdot dx+C\right]$$ C;積分定数

式(11)において，$\frac{dv_z}{dr}=\alpha$ とおくと，

$$(11)\Leftrightarrow\frac{d\alpha}{dr}+\frac{\alpha}{r}=\frac{1}{\mu}\frac{dp}{dz}$$

$$\Leftrightarrow\alpha=\frac{dv_z}{dr}=\exp\left(-\int\frac{1}{r}dr\right)\left[\int\frac{1}{\mu}\frac{dp}{dz}\exp\left(\int\frac{1}{r}dr\right)dr+A\right]$$

$$=\exp(-\ln r)\left[\frac{1}{\mu}\frac{dp}{dz}\int\exp(\ln r)dr+A\right]$$

$$=\frac{1}{r}\left(\frac{1}{\mu}\frac{dp}{dz}\int rdr+A\right)$$

$$=\frac{1}{2\mu}\frac{dp}{dz}r+\frac{1}{r}A$$

$$\Leftrightarrow v_z=\frac{1}{2\mu}\frac{dp}{dz}\int rdr+A\int\frac{1}{r}dr$$ ―――（12）

$$=\frac{1}{4\mu}\frac{dp}{dz}r^2+A\ln r+B$$

ただし，A,B は積分定数であり，境界条件を用いて求める．

境界条件は,

- r＝0 で，$v_z = V_{\max}$ となり，v_z は有限値を採る．$\lim_{r \to 0} \ln r = \infty$ で発散することより，$A = 0$ が得られる．
- 管壁ですべりなし条件を仮定すると，$r = R$ で $v_z = 0$

$$\therefore (12) \Leftrightarrow B = -\frac{1}{4\mu}\frac{dp}{dz}R^2$$

したがって，管内流の速度分布は,

$$v_z = \frac{1}{4\mu}\frac{dp}{dz}r^2 - \frac{1}{4\mu}\frac{dp}{dz}R^2 = -\frac{1}{4\mu}\frac{dp}{dz}\left(R^2 - r^2\right) \qquad ―――（13）$$

上式の速度分布を円管断面全体にわたって積分すれば，流量 Q を求めることができる

$$\begin{aligned} Q &= \iint_A v_z dr \cdot r d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^R -\frac{1}{4\mu}\frac{dp}{dz}\left(R^2 r - r^3\right)dr \\ &= -\frac{1}{4\mu}\frac{dp}{dz}\int_0^{2\pi}\left[\frac{1}{2}R^2 r^2 - \frac{1}{4}r^4\right]_0^R d\theta \\ &= -\frac{\pi}{8\mu}\frac{dp}{dz}R^4 \qquad ―――（14） \end{aligned}$$

流量 Q を断面積 A で割れば，平均流速 V_m が得られる．

$$V_m = \frac{Q}{A} = -\frac{\pi}{8\mu}\frac{dp}{dz}R^4 \Big/ \pi R^2 = -\frac{1}{8\mu}\frac{dp}{dz}R^2 \qquad ―――（15）$$

また，管中心の最大流速 $V_{\max}$ は，速度分布の式(13)に r＝0 を代入して,

$$V_{\max} = -\frac{1}{4\mu}\frac{dp}{dz}R^2 = 2V_m \qquad ―――（16）$$

一方, 長さ ℓ の配管で, 入口圧力 p_1 が圧力損失 $\varDelta p$（＞0）を起こして出口圧力 p_2（$< p_1$）となるとき,

$$p_1 - p_2 = \varDelta p$$

である．ここで, 完全発達領域において圧力は軸方向に直線的に減少するので（図 1 参照), 軸方向の圧力勾配は

$$-\frac{dp}{dz} = \frac{\varDelta p}{\ell} \qquad ―――（17）$$

で与えられる．流量の式(14)に式(17)を代入して次式を得る．

$$Q = \frac{\pi}{8\mu}\frac{\varDelta p}{\ell}R^4$$

$$\Leftrightarrow \varDelta p = \frac{8\mu}{\pi R^4}\ell Q \qquad ―――（18）$$

上式は,「流量は圧力損失に比例する」または「圧力損失は流量に比例する」と説明される．

設計上は「圧力差を⊿ｐに設定すれば$Q=\frac{\pi}{8\mu}\frac{\varDelta p}{\ell}R^4$の流量を流すことができる」と解釈する．

この結果，必要な流量（例，各家庭への水道の供給量）が分かれば，その流量を流す圧力差⊿ｐが分かるので，ポンプと管の組を決定することができる．すなわち式(18)は損失特性の式である．

式(15),(17)より，平均流速 V_m は次式で与えられる．

$$(15)\Leftrightarrow V_m=-\frac{1}{8\mu}\frac{dp}{dz}R^2=\frac{1}{8\mu}\frac{\varDelta p}{\ell}R^2 \qquad ———（19）$$

また，「円管（管長ℓ，管径 D=2R）の圧力損失⊿ｐは，表面積$\pi D\ell$と動圧$\rho {V_m}^2/2$に比例し，管断面積$\pi D^2/4$に反比例する」と考えられるので，次式を得る．

$$\varDelta p\propto \frac{\pi D\ell\cdot\frac{1}{2}\rho {V_m}^2}{\frac{\pi D^2}{4}}$$

よって，その比例定数をλとすれば，

$$\varDelta p=\lambda\frac{\ell}{D}\frac{\rho {V_m}^2}{2} \qquad ———（20）$$

と表せる（損失特性の式）．ここで，λは Darcy-Weisbach の管摩擦係数という無次元数である．式(20)を式(19)に代入して，

$$V_m=\frac{1}{8\mu}\frac{\lambda}{D}\frac{\rho {V_m}^2}{2}\frac{D^2}{4}$$

$$\Leftrightarrow \lambda=64\cdot\frac{\nu}{V_m D}$$

$$\therefore \lambda=\frac{64}{\mathrm{Re}} \qquad ———（21）$$

を得る．この式を Hagen-Poiseuille の式という．この法則は，Hargen（1839，土木技師）と Poiseuille（1840，医者）によって，それぞれ独立に実験的に見出された．

ここで，$\mathrm{Re}=\frac{V_m D}{\nu}$は Reynolds 数（慣性力と粘性力の比）である．

Hargen-Poiseuille の式を導くにあたって, とくにレイノルズ数に関する制約を設けなが, 実際にはこの式が成り立つには, レイノルズ数がある限界値以下の層流状態についてである．この限界レイノルズ数は,

$$(\mathrm{Re})_{cr}=\left(\frac{V_m D}{\nu}\right)_{cr}\cong 2300 \qquad ———（22）$$

であり，Re＜2000 の時，実験値とよく一致する（図 2 参照）．

図２では片対数グラフを使用しており，ここでの Hargen-Poiseuille の式は，式(21)で両辺に $\log_{10}$ をとった次式である．

$$(21)\Leftrightarrow \log_{10}\lambda=\log_{10}64-\log_{10}\mathrm{Re} \qquad ———（23）$$

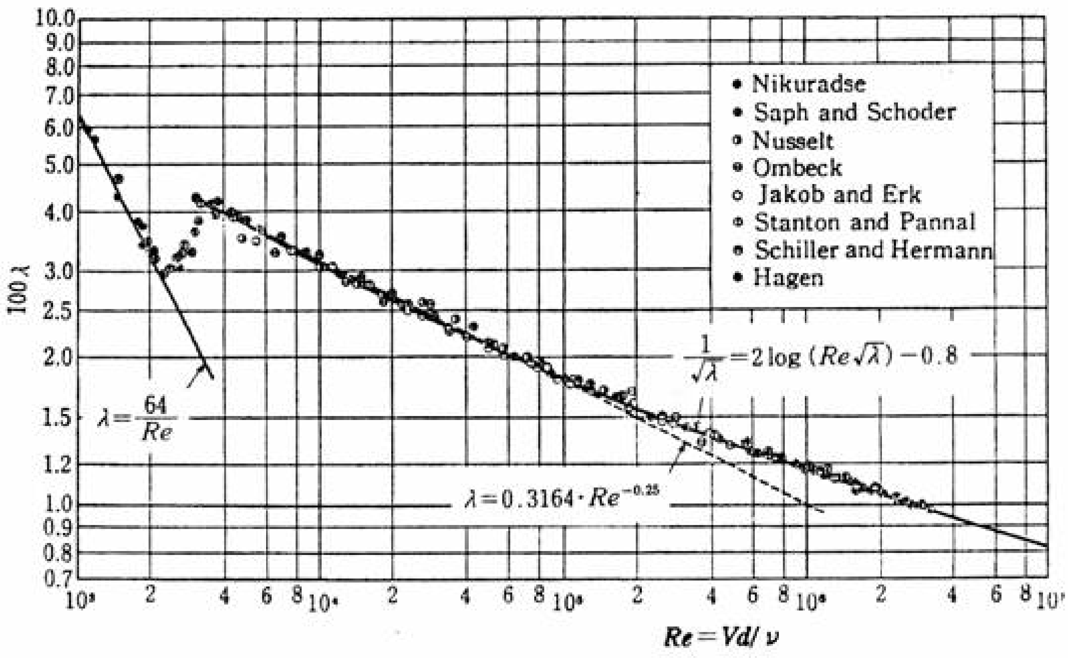


図２　滑らかな円管の管摩擦係数

２．３ 乱流の理論式（Prandtl-Kalman の式）

壁面付近の流れは，その近くで重要な役割をする物理量――密度ρ，動粘性係数ν，壁面摩擦応力τw，壁からの距離ｙ――により支配され，管全体にかかわる量（レイノルズ数など）には無関係であると推論される．前者のうちでτとρから作られる

$$u^*=\sqrt{\tau_w/\rho} \qquad ――― (24)$$

は速度の次元を持ち，速度の代表スケールとみなしうる．これを摩擦速度と呼ぶ．したがって，これらの支配量から作られる無次元長さを

$$\eta=\frac{u^* y}{\nu} \qquad ―――$$

（25）

で定義すれば，壁面近くの流速分布はレイノルズ数に無関係に

$$\frac{u}{u^*}=f_n(\eta) \qquad ――― (26)$$

の形に書きうる．これを Prandtl の壁法則という．

さて，十分に発達した管路の乱流を考える．ここで，管壁は十分滑らかであるとする．平均流速$u^+=u/u^*$に関する流体のせん断応力はニュートンの粘性法則より，次のように書ける．ただし，u は軸方向速度v_zに等しい．

$$\tau=\mu\left(\frac{dv_z}{dr}+\frac{dr}{dv_z}\right)=\mu\frac{dv_z}{dr}$$

したがって，式(13)よりせん断応力τは,

$$|\tau| = \left| -\mu \cdot \frac{1}{4\mu}\frac{dp}{dz}\frac{d}{dr}\left(R^2 - r^2\right) \right| = \frac{r}{2}\left(-\frac{dp}{dz}\right) \qquad ———(27)$$

ここで，ｒを壁からの距離ｙを用いた，壁座標表示すると，

$$r = R - y$$

の関係がある．よって，式(28)は次のように書き換えられる．（ただし，τ＞0とする）

$$\tau = \frac{R-y}{2}\left(-\frac{dp}{dz}\right) \qquad ———（29）$$

せん断応力τは分子粘性による応力とレイノルズ応力の和である．しかし，分子粘性の作用を考慮しなければばならないのは壁面のごく近くのみで,そこを離れると乱流運動が卓越して，せん断応力はほとんどレイノルズ応力によるものと考えられる．ｚ軸方向の流れを u，ｙ軸方向の流れをｖとして乱流運動の応力を示すと，

$$\tau = \mu\frac{du}{dy} - \rho\overline{u'v'} \approx -\rho\overline{u'v'} \qquad ———（30）$$

ただし，u'，v' は流速の乱流成分を表し，「ｙ軸に直角な単位面積には，運動量成分の方向（ｚ軸方向）に作用する」という Reynolds によって導かれた乱流運動にともなう応力をレイノルズ応力と呼ぶ．その導出例を示せば，統計的平均 E を用いて

$$\begin{aligned}\tau_{yz} &= -E[\rho(u+u')v'] \\ &= -E[\rho u'v'] \\ &= -\rho\overline{u'v'}\end{aligned}$$

ただし，$E[v'] = 0$ とする．

ところで，Prandtl の混合距離理論によれば，レイノルズ応力は次式に書き換えられる．

$$\tau = -\rho\overline{u'v'} = \rho\ell^2 \cdot \left|\frac{du}{dy}\right| \cdot \frac{du}{dy} \qquad ———（31）$$

混合距離 ℓ に関して Prandtl と Kalman はそれぞれ次のように仮定した．

A)　Prandtl；$\ell = \kappa y$ ———（32）

B)　Kalman；$\ell = \kappa \dfrac{du}{dy}\Big/\dfrac{d^2u}{dy^2}$ ———（33）

管路乱流のせん断応力は，式(29)のように直線分布となるが，混合距離に関する Prandtl の仮定が適用しうる範囲では，むしろせん断応力τは壁面せん断応力 τ_w に等しいと考えるべきである．こうした領域を“一定せん断応力層”と呼ぶ．結局，せん断応力分布は，

$$\tau = \tau_w = -\frac{dp}{dz}\cdot\frac{R}{2} \qquad ———（34）$$

あるいは断面全体を考えれば

$$\tau = \left(1 - \frac{y}{R}\right)\tau_w \qquad ———（35）$$

管内流速は，式(31)に上式のτおよび ℓ の関係式を代入して積分を行うことで求めることができる．そのうち，最も単純な仮定の組，Prandtl の仮定式(32)およびせん断応力分布式(34)を用い，かつ，式(31)で du/dy が今回の場合は常に正であるので，絶対値記号を取り除けば，次の関係式が得られる．

$$(31) \Leftrightarrow \quad \tau_w = \rho(\kappa y)^2 \left(\frac{du}{dy}\right)^2$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{du}{dy} = \frac{1}{\kappa y}\sqrt{\frac{\tau_w}{\rho}}$$

式(24)より，$u^* = \sqrt{\frac{\tau_w}{\rho}}$ なので上式は,

$$\Leftrightarrow \quad \frac{du}{dy} = \frac{u*}{\kappa}\cdot\frac{1}{y} \qquad ――― (36)$$

したがって，式(36)を積分して管路乱流の流速分布式が得られる.

$$(36) \Leftrightarrow \quad u = \frac{u*}{\kappa}\ln y + C \qquad \text{（C;積分定数）}$$

$$\therefore \frac{u}{u*} = \frac{1}{\kappa}\ln y + C' \qquad \text{（C'=C/u*）} \qquad ――― (37)$$

これまでの議論は，壁面の粗滑に言及しておらず，いずれの場合にも成立する．しばらくの間以下に滑らかな管路に関して話をすすめる.

さて，壁面付近で“壁法則”が成り立つことを考えれば，式(37)は新たに普遍定数 A_s（添字 s は smooth の意味）を導入して

$$\therefore \frac{u}{u*} = \frac{1}{\kappa}\ln\frac{u*y}{\nu} + A_s \qquad ――― (38)$$

カルマン定数κおよび普遍定数 A_s は実験値より，κ＝0.4，普遍定数 A_s＝5.5 と定まっているので，式(38)は次式のようになる.

$$\frac{u}{u*} = u^+ = 2.5\ln\frac{u*y}{\nu} + 5.5 \qquad ――― (39)$$

ところで，壁面せん断応力 τ_w は流れの平均流速動圧 $\rho V^2/2$ に比例すると考えられ，局所壁面摩擦係数 C_f を用いて

$$\tau_w = C_f \rho V^2/2 \qquad ――― (40)$$

と表される.

図３に示すように，距離 ℓ だけ離れた２断面の圧力が p_1, p_2 であるとする．管内の流れは，完全発達流であるので加減速がない．したがって，管内に作用する力の総和は 0 でなければならない．管の両断面には圧力 p_1, p_2 が，また管壁にはせん断応力 τ_w が作用する.

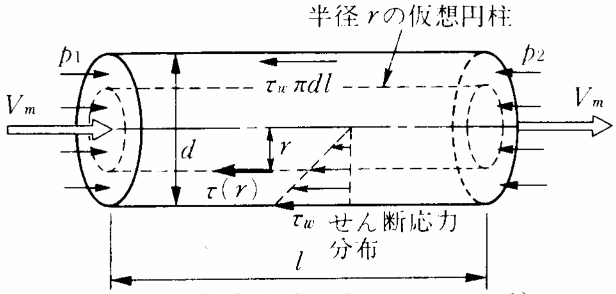


図３　円管内流体の力のつりあい[1)]

これらの圧力差とせん断応力による力のつり合いの式は,

[圧力による力]＝[せん断応力による力]

$$(p_1 - p_2)\pi \cdot \frac{d^2}{4} = \pi d\ell\tau_w$$

$$\Leftrightarrow \quad \tau_w = \frac{(p_1 - p_2)d}{4\ell} = \frac{\varDelta p \cdot d}{4\ell} \qquad ―――(41)$$

となる．式(20)より⊿pは,

$$\varDelta p = \lambda \frac{\ell}{d} \frac{\rho V_m{}^2}{2}$$

であるので，これを式(41)に代入すると,

$$\tau_w = \frac{d}{4\ell} \cdot \lambda \frac{\ell}{d} \frac{\rho V_m{}^2}{2} = \frac{\lambda}{4} \cdot \frac{\rho V_m{}^2}{2} \qquad ―――(42)$$

これが，式(40)⇔ $\tau_w = C_f \rho \frac{V_m^2}{2}$ と一致するので，式(40)と式(42)の係数比較すると,

$$C_f = \frac{\lambda}{4} \qquad ―――(43)$$

が得られる.

従って,

$$\tau_w = \frac{\lambda}{4} \frac{\rho V^2}{2} \qquad ―――(44)$$

となる．ただし，V は断面内の平均流速である．さらに $u*$ の定義式(24)から,

$$u* = \sqrt{\frac{\tau_w}{\rho}} = \sqrt{\frac{\lambda V^2}{8}} = V\sqrt{\frac{\lambda}{8}} \qquad \Leftrightarrow \quad \frac{u*}{V} = \sqrt{\frac{\lambda}{8}} \qquad ―――(45)$$

の関係式を得る.

次に，式（39）の速度分布を用いると，層流の場合と同様に流量は,

$$Q = 2\pi \int_0^R v_z r dr$$

$$= 2\pi \int_0^R u(R-y)dy \qquad (\because r = R - y)$$

ここで u は,

$$u = u*\cdot u^+ = u*\left(2.5\ln\frac{u*y}{\nu} + 5.5\right) \qquad ―――(46)$$

であるので，流量 Q の式は,

$$Q = 2\pi \int_0^R (R-y)u*\left(2.5\log_e \frac{u*}{\nu} + 5.5\right)dy \qquad ―――(47)$$

で与えられる.

式(47)を積分計算すると,

$$Q = 2\pi \int_0^R (R-y)u*\left(2.5\ln\frac{u*y}{\nu} + 5.5\right)dy$$

$$= 2\pi u* \int_0^R \left(2.5R\ln\frac{u*y}{\nu} + 5.5R - 2.5y\ln\frac{u*y}{\nu} - 5.5y\right)dy$$

$$= 5\pi u*\int_0^R\left(R\ln\frac{u*y}{\nu} - y\ln\frac{u*y}{\nu}\right)dy + 11\pi u*\int_0^R (R-y)dy$$

$$= 5\pi u*\int_0^R\left\{Ry'\ln\frac{u*y}{\nu} - \left(\frac{1}{2}y^2\right)'\ln\frac{u*y}{\nu}\right\}dy + 11\pi u*\left[Ry - \frac{1}{2}y^2\right]_0^R$$

$$= 5\pi u*\left[Ry\ln\frac{u*y}{\nu} - \frac{1}{2}y^2\ln\frac{u*y}{\nu}\right]_0^R - 5\pi u*\int_0^R\left(Ry\frac{1}{y} - \frac{1}{2}y^2\frac{1}{y}\right)dy + 5.5\pi u*R^2$$

ここで，$\lim_{y\downarrow 0}\left(Ry\ln\frac{u*y}{\nu} - \frac{1}{2}y^2\ln\frac{u*y}{\nu}\right)$をロピタルの定理より求めることとする．

ロピタルの定理とは,

$\lim_{x\downarrow a} f(x) = \lim_{y\downarrow a} g(x) = 0$ を満たしている時,

$\lim_{x\downarrow a}\frac{f'(x)}{g'(x)} = \alpha$ ならば，$\lim_{x\downarrow a}\frac{f(x)}{g(x)} = \alpha$　　ただし，$g'(x) \neq 0$ とする．

今回は,

$f(y) = \ln\frac{u*y}{\nu}$，$g(y) = \frac{1}{Ry}$ とすると,

$f'(y) = \frac{1}{y}$，　$g'(y) = -\frac{1}{Ry^2}$　　　よって，$\lim_{y\downarrow 0}\frac{f'(y)}{g'(y)} = \lim_{y\downarrow 0}(-Ry) = 0$

したがって，$\lim_{y\downarrow 0}\frac{f(y)}{g(y)} = \lim_{y\downarrow 0}\left(Ry\lim\frac{u*y}{\nu}\right) = 0$ ―――（48）

同様に,

$h(y) = 1\Big/-\frac{1}{2}y^2$ とすると，$h'(y) = \frac{4}{y^3}$ より，$\lim_{y\downarrow 0}\frac{f'(y)}{h'(y)} = \lim_{y\downarrow 0}\left(\frac{y^2}{4}\right) = 0$

したがって，$\lim_{y\downarrow 0}\frac{f(y)}{h(y)} = \lim_{y\downarrow 0}\left(-\frac{1}{2}y^2\lim\frac{u*y}{\nu}\right) = 0$ ―――（49）

よって，式(48),(49)より流量Qの式は,

$$Q = 5\pi u*\left(R^2\ln\frac{u*R}{\nu} - \frac{1}{2}R^2\ln\frac{u*R}{\nu}\right) - 5\pi u*\int_0^R\left(R - \frac{1}{2}y\right)dy + 5.5\pi u*R^2$$

$$= 2.5\pi u*R^2\ln\frac{u*R}{\nu} - 5\pi u*\left[Ry - \frac{1}{4}y^2\right]_0^R + 5.5\pi u*R^2$$

$$= 2.5\pi u*R^2\ln\frac{u*R}{\nu} - 5\pi u*\cdot\frac{3}{4}R^2 + 5.5\pi u*R^2$$

$$= \pi R^2 u*\left(2.5\ln\frac{u*R}{\nu} + 1.75\right) \qquad ―――（50）$$

を得る．よって平均流速Vは次式のようになる．

$$V = \frac{Q}{\pi R^2} = u*\left(2.5\ln\frac{u*R}{\nu} + 1.75\right) \qquad ―――（51）$$

式(51)をレイノルズ数；$\mathrm{Re}=\dfrac{2RV}{\nu}$ を用いて次式のように変形する．

$$\frac{V}{u^*}=2.5\ln\left(\mathrm{Re}\frac{u^*}{2V}\right)+1.75 \qquad ———（52）$$

上式に式(45)を代入して，u^*/V を消去すれば，

$$(52)\Leftrightarrow\sqrt{\frac{8}{\lambda}}=2.5\ln\left(\mathrm{Re}\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\lambda}{8}}\right)+1.75$$

$$\Leftrightarrow\frac{1}{\sqrt{\lambda}}=\frac{2.5}{\sqrt{8}}\ln\left(\frac{1}{2\sqrt{8}}\mathrm{Re}\sqrt{\lambda}\right)+\frac{1.75}{\sqrt{8}}$$

$$=0.884\left[\ln\left(\mathrm{Re}\sqrt{\lambda}\right)-\ln 2\sqrt{8}\right]+0.619$$

$$=0.884\ln\left(\mathrm{Re}\sqrt{\lambda}\right)-0.913 \qquad ———（53）$$

を得る．自然対数を常用対数に変換すると（実験との比較には常用対数を用いなければならない），

$$(53)\Leftrightarrow\frac{1}{\sqrt{\lambda}}=0.884\frac{\log_{10}\left(\mathrm{Re}\sqrt{\lambda}\right)}{\log_{10}e}-0.913$$

$$=0.884\frac{\log_{10}\left(\mathrm{Re}\sqrt{\lambda}\right)}{0.434}-0.913$$

$$=2.037\log_{10}\left(\mathrm{Re}\sqrt{\lambda}\right)-0.913 \qquad ———（54）$$

となるが，このままでは実験とわずかに合わないので，実験と合うように係数を調整すると，

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}}=2\log_{10}\left(\mathrm{Re}\sqrt{\lambda}\right)-0.8 \qquad ———（55）$$

となる．上式を Prandtl-Kalman の式という．この式は，$4\times10^3\le\mathrm{Re}\le3\times10^6$ で実験値と一致する（ｐ.11・図２参照）．

２．４　乱流の実験式（Blasius の式）

Blasius は実験データを整理し，壁面せん断応力について次式を得た．

$$\tau_w=0.03955\rho V^2\,\mathrm{Re}^{-0.25} \qquad ———（56）$$

上式に式(44)を代入すると次式を得る．

$$\lambda=0.3164\,\mathrm{Re}^{-0.25} \qquad ———（57）$$

上式を Blasius の式という．この式は，$3\times10^3\le\mathrm{Re}\le1\times10^5$ で実験値と一致する（図２参照）．

２．５　粗い管（Colebrook の式）

管内壁に粗さのある管では，Prandtl-Kalman の式から外れる（図 4 参照）．この外れ方は，相対粗さ k/D（k：粗さの粒の平均サイズ，D：管径）に依存する．Prandtl-Kalman の式が適用できる管を滑らかな管（滑面管）という．一方，完全に粗い管（完全粗面管）では，λ は Re には依存せず，k/D だけの関数となる．ただし，完全粗面管と見なせるかどうかは Re の大きさによる．

Colebrook は，表面粗さのある円管に対して，滑面管と完全粗面管をつなぐ次式を考案した．

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = -2\log_{10}\left(\frac{2.51}{\mathrm{Re}\sqrt{\lambda}} + \frac{1}{3.71}\frac{k}{D}\right) \qquad ――― (58)$$

上式を Colebrook の式という．なお，粗さがゼロの時は，

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = -2\log_{10}\left(\frac{2.51}{\mathrm{Re}\sqrt{\lambda}}\right) = 2\log_{10}\left(\mathrm{Re}\sqrt{\lambda}\right) - 0.8 \qquad ――― (59)$$

となり，Prandtl-Kalman の式(55)に一致する．

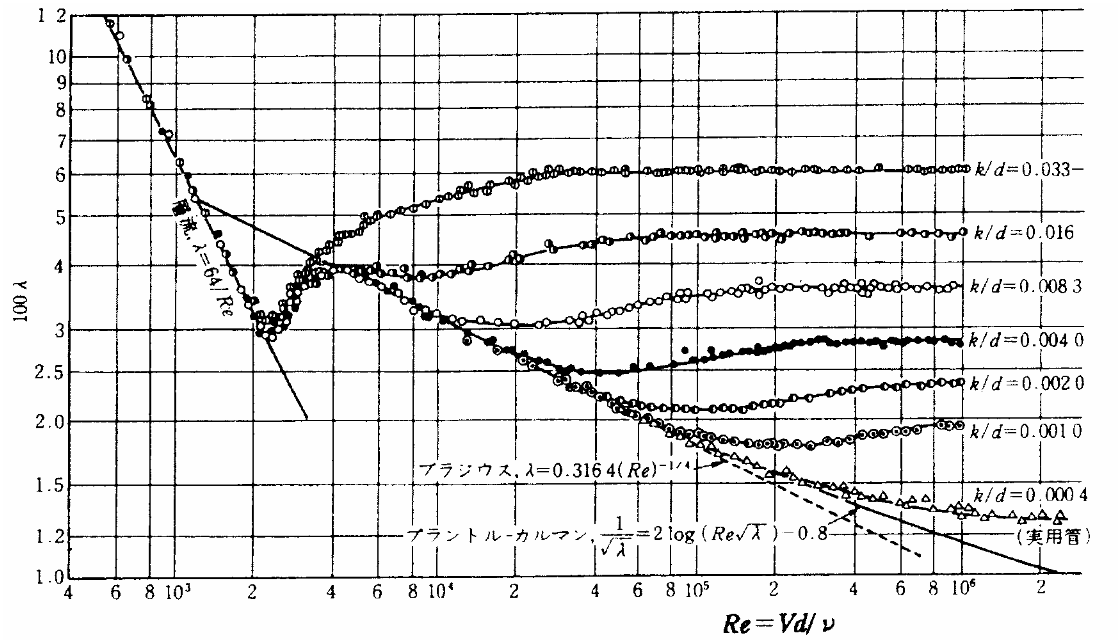


図４　Nikuradse の実験による砂粒粗さを用いた円管の摩擦係数

Re の増加に伴う管摩擦定数λの特性の変化をまとめると図５のようになる．

乱流における上述のような粗さのλへの影響の現れ方は，壁面近くの乱流構造に依存している．乱流は激しく渦を巻く運動からなっているが，壁のごく近くではこの運動が壁面により妨げられるので，乱れ運動が抑制される．かわりに，ここには粘性の影響を強く受ける粘性底層という薄い層が形成される．粘性底層の厚さδ_vは，Re が大きくなると薄くなることが分かっている．

いま，図６に示すように径が k の砂粒を張り付けた壁を考え，Re の増大により粘性底層厚さδ_vと k の大小関係がどう変わるかみてみよう．Re が低い場合にはδ_vが大きいので，砂粒は粘性底層内に埋もれている．この場合，強い粘性作用のため粗さは乱流の流れに影響を及ぼさない．したがって，壁は滑面とみなせる．Re が増大し，δ_vが荒さ要素高さ k より小さくなると，乱流の流れに粗さの影響が現れ始め，λが滑面の場合より大きくなる．さらに Re が大きくなり，$k \gg \delta_v$となれば，粗さ要素全体が乱流域に入り，壁は完全に粗くなる．

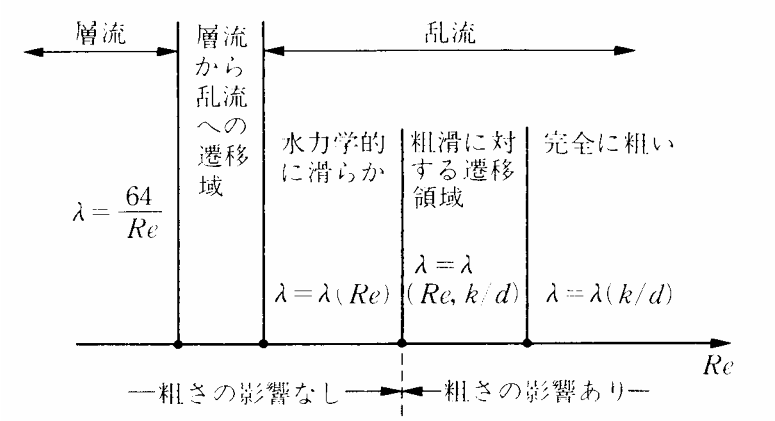


図５　Re 数の変化に対する λ の特性の変遷[1)]

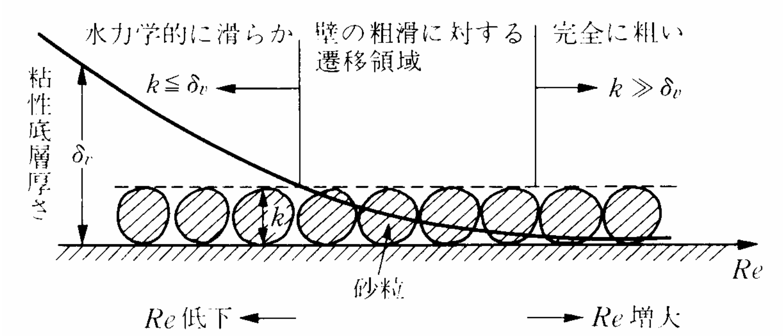


図６　Re 数の変化に対する δ_v と k の大小関係[1)]

２．６ Moody 線図

Moody は，層流の式(21)，Prandtl-Kalman の式(55)，Colebrook の式(58)を 1 つのグラフ上にまとめた．これを Moody 線図という（図７参照）．Moody 線図には，「中間（過度）領域」と「完全に粗い領域」との境界が点線で示されている．この点線には，λ が Re にほとんど依存しなくなる境界を表す．つまり，式(58)の log の引数の第 1 項が第 2 項に比べて無視できることを意味する．この条件としては一般に $1/200$ が選ばれる．すなわち，

$$\frac{1}{\mathrm{Re}\sqrt{\lambda}}=\frac{1}{200}\frac{k}{D} \qquad \text{———（59）}$$

である．上式が「過度領域」と「完全に粗い領域」の境界の式となる．また，「完全に粗い領域」では，式(58)の log の引数の第 1 項を無視することができ，

$$\begin{aligned}(58) \Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{\lambda}} &= -2\log_{10}\left(\frac{1}{3.71}\frac{k}{D}\right)\\ &= -2\log_{10}\left(\frac{k}{D}\right)-2\log_{10}\frac{1}{3.71}\\ &= -2\log_{10}\left(\frac{k}{D}\right)+1.14 \qquad \text{———（60）}\end{aligned}$$

となる．

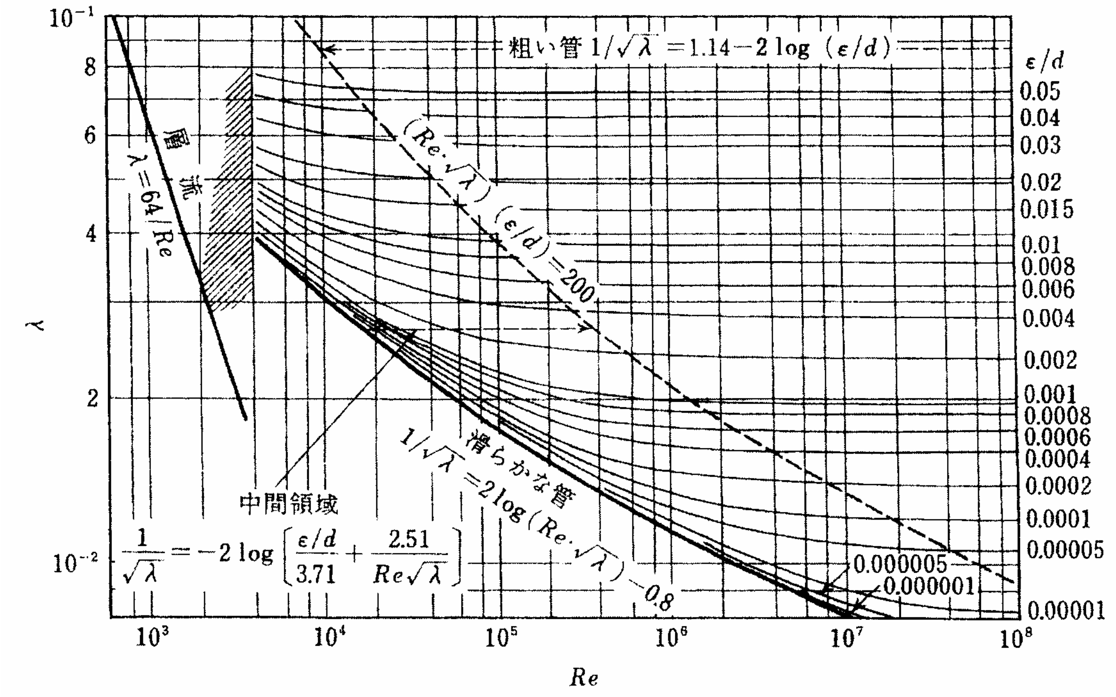


図７　Moody 線図（機械工学実験テキストより，$\varepsilon/d=k/d$）

ε：粗さの粒の平均サイズ，d：管径

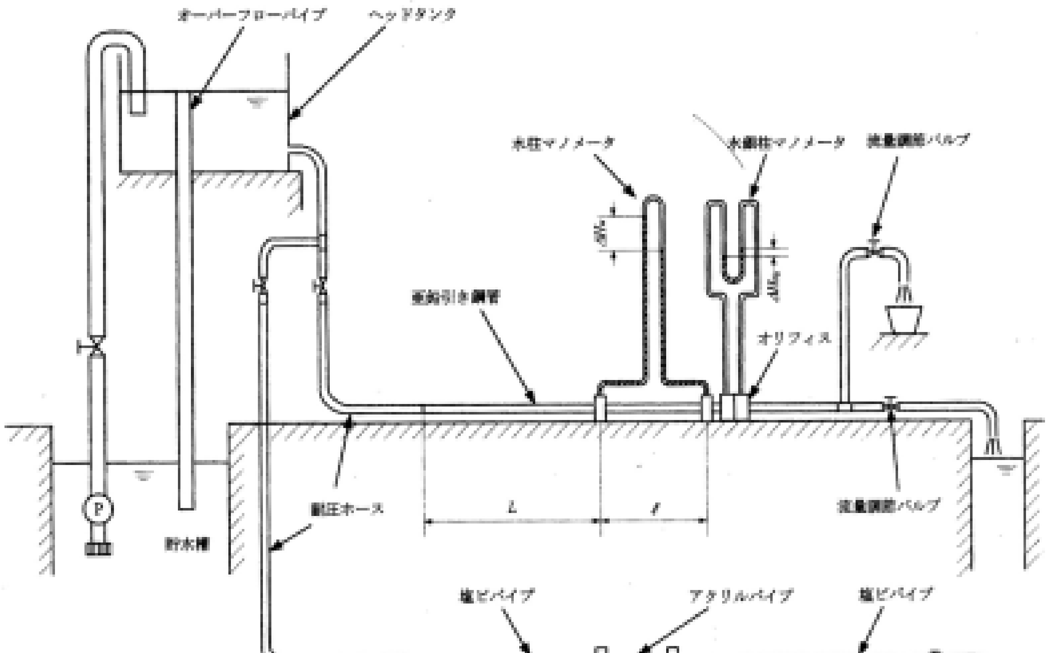


図８　水流の実験装置

３．　実験装置

３．１ 水流

図８に水流の実験装置を示す．ヘッドタンク内の水位は，給水ポンプとオーバーフローパイプにより常に一定に保たれている．上流のバルブ開閉により，可視化用円管と圧力損失用円管とに流れを分岐させる．

３．１．１　可視化観察

可視化部はアクリル製パイプである．

各部の寸法：　D=1.3cm，ℓ＝100cm，L=250cm

可視化装置の詳細を図９に示す．

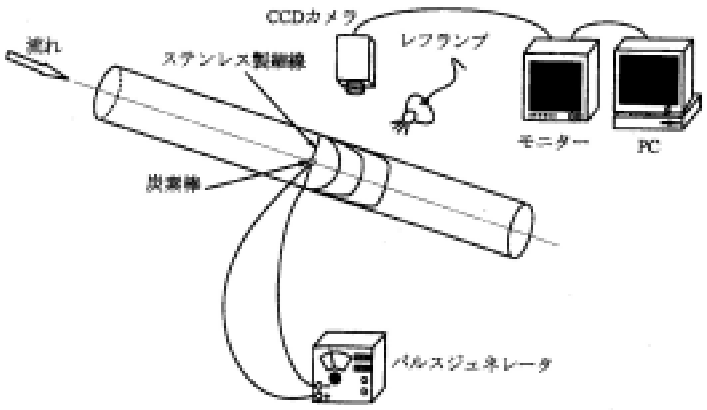


図９　可視化装置

DC パルスジェネレータの陰極に直径 30μm のステンレス製細線を，陽極には直径 5μm の炭素棒を接続して電気分解により陰極のステンレスワイヤから水素気泡を発生させる．（水素気泡法）水素気泡を CCD 素子のビデオカメラにより撮影し，処理ボードを介して画像をパソコンに取り込む．なお，テレビモニターは画像記録前の撮影状況を確認するために使用する．また，照明にはレフランプ(500W)を使用する．

≪流れの可視化・電気制御法≫

目では観察できない流れを何らかの工夫で観察可能にする技術を流れの可視化という．流れの可視化は，流れを直感的に把握できることおよび比較的簡単に応用できることから，工学，工業の分野でも広く利用されている．このような流れの可視化手法としては，壁面トレース法，タフト法，注入トレーサ法，化学反応トレーサ法，電気制御トレーサ法，光学的可視化法があるが，流体の種類や観察の目的と対象などによって適・不適があるので，事前に十分な検討を行う必要がある．

本実験で行う電子制御法は，トレーサの発生を電気的に制御することができる方法で，非定常流れや三次元流れの計測にも対応する．水流に対する水素気泡発生法と，気流に対する火花追跡法およびスモークワイヤ法がある．

- **水素発生法**

水素発生法は，水流中に金属細線を張って陰極とし，他に陽極を置いて電気分解により金属細線から生ずる微細な水素気泡群をトレーサとして利用するもので，流れを汚染することが少なく，２[m/s]程度までの流速に適用される．電圧を連続的か断続的に加えることにより写真撮影の露光時間との組み合わせから，流脈，流跡およびタイムラインのいずれでも観測することができる．

３．１．２　圧力損失

円管は亜鉛引き鋼管である．

- 各部の寸法：　D=2.78cm，ℓ=150cm，L=250cm
- 圧力差の測定：水柱マノメータを使用する．

$$\varDelta p = \rho_w g \varDelta H_w, \quad \rho_w：水の密度 \qquad ―――（61）$$

- 流量の測定：重量法およびオリフィス（JIS Z 8762）を用いる．

オリフィス前後の圧力差$\varDelta p_0$と流量の関係は，

$$Q = \alpha \frac{\pi D_0^{\ 2}}{4} \sqrt{\frac{2\varDelta p_0}{\rho_w}} \qquad ―――（62）$$

で与えられる．ここで，

$$\begin{cases} \alpha：流量係数 \\ D_0：オリフィス孔径 \\ \rho_w：水の密度 \end{cases}$$

ただし，オリフィス差圧$\varDelta p_0$の測定には水銀柱マノメータを使用する．

$$\varDelta p_0 = (\rho_{Hg} - \rho_w) g \varDelta H_{Hg}, \quad \rho_{Hg}：水銀の密度 \qquad ―――（63）$$

≪マノメータの原理≫

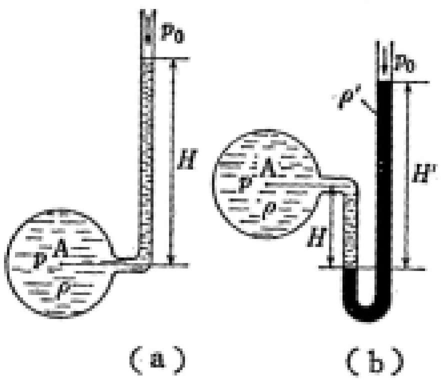


図 10　通常マノメータ[4)]

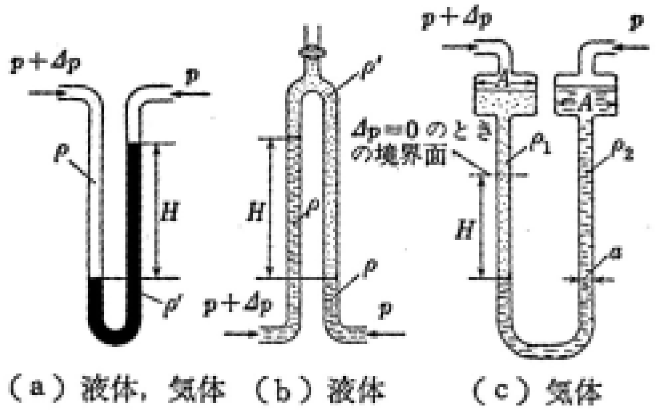


図 11　示差マノメータ[4)]

液体の圧力を，密度の分かっている液体の液柱の重量とつりあわせ，その液柱の長さを測定して圧力を求める圧力計をマノメータという．液体は，圧力が比較的高い時には水銀，低い時には水やアルコールが使用される．

（１）　通常マノメータ

図 10 に通常マノメータの原理図を示す．(a)は，容器の中の圧力を，容器内の液体と同じ液体の液柱によって測定するものである．点 A の圧力ｐは，

$$p = p_0 + \rho g H$$

ここに，p_0は外気圧力，ρは液体の密度，ｇは重力加速度，H は測定する点 A から測った液面の高さである．

(b)は，点 A の圧力が大きく(a)の方法では液柱が高くなりすぎる時，液注を密度の大きい液体(例えば,水に対して水銀など)によって置き換えて圧力を測定する場合を示している．H と H'を測定すれば，点 A の圧力が次式で求まる．

$$p = p_0 + \rho' g H' - \rho g H$$

ただし，ρ'は置き換えた液体の密度である．

（2） 示差マノメータ

示差マノメータは，二つの圧力の差を測定するもので，図 11 にその測定原理を示している．図の(a)は，液体または気体の圧力差⊿ｐを，それより密度の大きい液柱によって測定する場合を示している．液柱 H を測定すれば，

$$\varDelta p=(\rho'-\rho)gH$$

から,圧力差⊿ｐが求まる. (a)のようなマノメータをその形から U 字管マノメータという. １本の U 字管マノメータでは液柱 H が大きすぎて測定できない場合, ２本以上の U 字管マノメータを直列に連結し，液柱の全長 H を分割して測定すればよい．そのようなマノメータを多管マノメータと呼ぶ.

(b)は，原液より軽い液体（ρ'＜ρ）を使用する場合で，圧力差⊿ｐは,

$$\varDelta p=(\rho-\rho')gH$$

で求められる.

気体の液柱差を測定する場合には，(a)と同様にして，ρを気体，ρ'を水などの液体として使用することで測定できる．圧力差が小さい場合，(c)のように密度の近い２種類の液体 ρ_1, ρ_2 を用いると，液柱を拡大して測定することができる．二つの小タンクの断面積が等しいとしてこれを A とすうると，圧力差がないときの両液の境界面に対し，圧力差⊿ｐを加えたときに境界面が H だけ下降したとすれば，圧力差⊿ｐは次式によって表される.

$$\varDelta p=\left[(\rho_2-\rho_1)+(\rho_1+\rho_2)\frac{a}{A}\right]gH$$

面積比 a/A が十分小さければ，上式は次のようになる.

$$\varDelta p=(\rho_2-\rho_1)gH$$

≪オリフィスの原理≫

JIS Z 8762 に規定されているオリフィス板（管オリフィスともいう）の形状と寸法比は図 12 に示すとおりである．差圧の取り出し方法として，コーナタップ，縮流タップおよびフランジタップのいずれかを用いる．図 12 はコーナタップの場合を示しており，単孔によるものと環状室によるものとの２種類がある. 縮流タップでは, 上流側圧力取出口の位置はオリフィス板の上流面から１D, 下流側圧力取出口は絞り直径比βの大きさに応じて規格の指示する位置とする. フランジタップでは, 上流側および下流側圧力取出口をオリフィス板上流面から上流と下流へそれぞれ 25.4mm の位置に設ける.

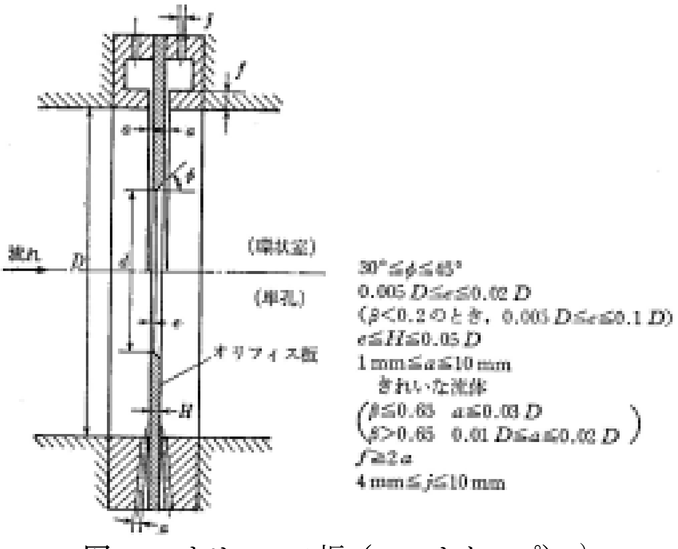


図 12　オリフィス板（コーナタップ）[4]

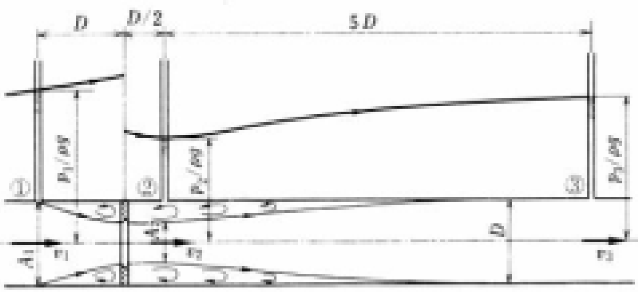


図 13　管内オリフィス[4)]

体積流量 Q は次の式から計算する．

$$Q=\alpha\varepsilon\frac{\pi}{4}d^{2}\sqrt{\frac{2\varDelta p}{\rho}}$$

ここに，αは流量係数，εは気体の膨張補正係数，dは絞り孔径，⊿pは測定される差圧，ρは流体の密度である．

非圧縮性流体を扱う場合，ε＝1とする．また，流量係数αは，コーナタップの場合，次の式から計算する．

$$\alpha=\alpha_{0}\times r_{\mathrm{Re}}$$

ここに，α_0は絞り直径比βとレイノルズ数 Re_D（$=vD/\nu$）の関数で，図 14 の値をとる．r_{Re}は，管内壁の粗さによる補正係数であって，管内壁の相対粗さk/Dとレイノルズ数 Re_Dに関係する．r_{Re} は次の式で求められる．

$$r_{\mathrm{Re}}=(r_{0}-1)\left(\frac{\log_{10}\mathrm{Re}_{D}}{6}\right)+1$$

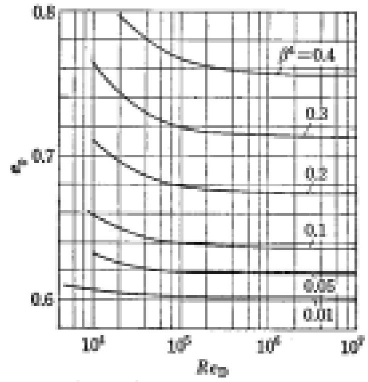


図 14　オリフィス板（コーナタップ）の流量係数α_0[4)]

ただし，$\mathrm{Re}_D\geq 10^6$のとき，$r_{\mathrm{Re}}=r_0$とする．r_0の値は，表 1 による．また，kは管内壁の粗さを示す．

表 1　オリフィス板のr_0（コーナタップ）[4)]

β^2 ＼ D/k	400	800	1 600	2 400	≧3 200
0.1	1.002	1.000	1.000	1.000	1.000
0.2	1.003	1.002	1.000	1.000	1.000
0.3	1.006	1.004	1.001	1.000	1.000
0.4	1.009	1.006	1.002	1.000	1.000
0.5	1.014	1.009	1.004	1.001	1.000
0.6	1.020	1.013	1.006	1.002	1.000
0.64	1.024	1.016	1.007	1.002	1.000

3．2 空気流

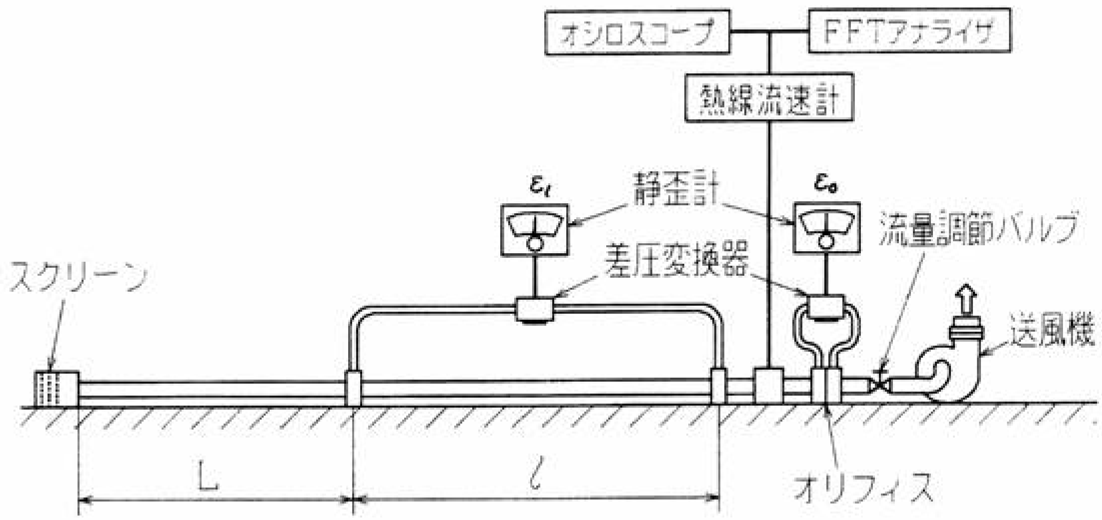


図 15　空気流の実験装置

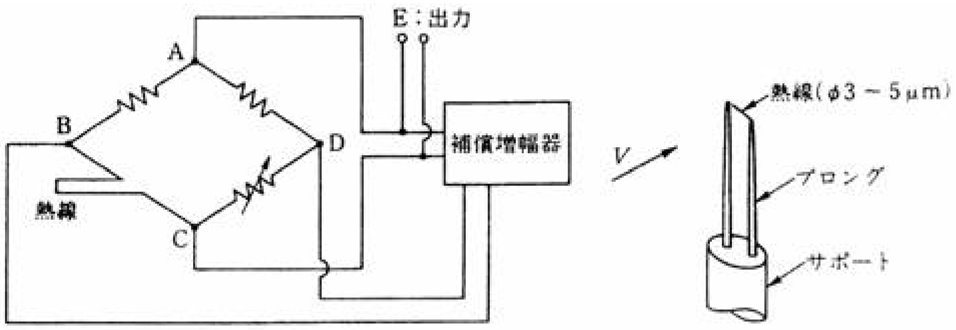


図 16　定温度形熱線流速計の動作原理図と熱線プローブ

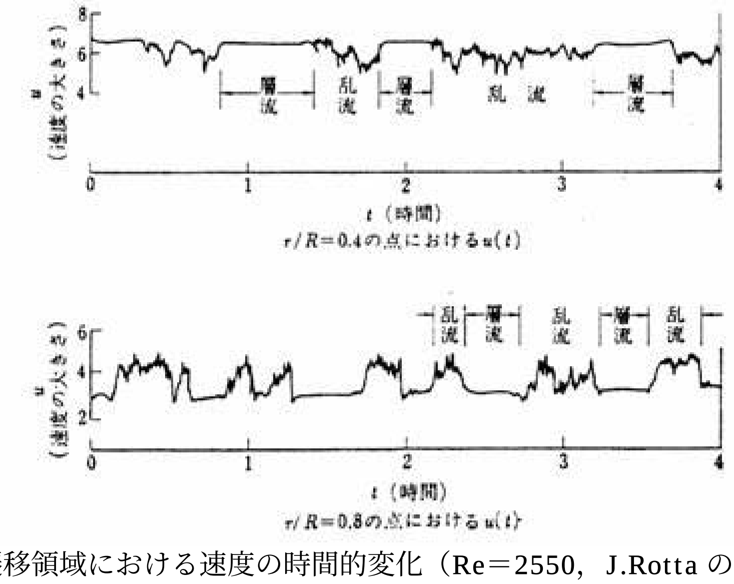


図 17　遷移領域における速度の時間的変化（Re＝2550，J.Rotta の実験より）

図 15 に空気流の実験装置を示す．空気は送風機により円管を通って吸い込まれる．円管は内面が水力学的に滑らかなステンレス管である．

- 各部の寸法：$d = 1.028\ \ \mathrm{cm}$，$\ell = 200\ \ \mathrm{cm}$，$L = 150\ \ \mathrm{cm}$
- 圧力差の測定：差圧変換機を使用する．差圧変換機は，圧力検出素子にひずみゲージを使用したもので，圧力差を電気量に変換する．微小圧力差を高精度に測定できる．

$$\varDelta p = p_1 - p_2 = (\text{係数}) \times (\text{ひずみ}) \qquad ———（64）$$

- 流量の測定：オリフィス（JIS Z 8762）を用いる．
  オリフィス前後の圧力差$\varDelta p_0$と流量の関係は，

$$Q = \alpha \frac{\pi d_0^2}{4} \sqrt{\frac{2\varDelta p_0}{\rho_a}} \qquad ———（65）$$

で与えられる．ここで，

α ：流量係数（検定曲線より与えられる）
d_0 ：オリフィス孔径（0.600　cm）
ρ_a ：空気の密度

- 速度変動の観測：熱線流速計を用いる（図 16 参照）．熱線流速計は，加熱された金属の細線から流れによって奪われる熱量が流速に応じて変化することを利用したもので，高周波数の速度変動まで測定できる．遷移領域における速度変動波形の例を図 17 に示しておく．

≪熱線流速計の原理≫

熱線流速計は，あらかじめ電気的に加熱された細い金属線の電気抵抗が，流れの流速に応じて冷却効果のため変化することを応用したもので，定電流法と定温度法の二つの方式がある．熱線はホイーストンブリッジの四つの抵抗のうちの一つを形成しており，流れの流速が零の時に検流計の読みが零になるように回路を調整しておく．

定電流法の場合は，熱線に常に一定の電流が流れるようにし，流速を加えると熱線は冷却されて電気抵抗が減少し，ブリッジの平衡が失われて検流計の指針が振れる．その際の非平衡電圧と流速との関係を校正しておけば，出力電圧を測定して流れの速度を求めることができる．この定電流法では，流れの速度変動に対する熱線の熱的追従性から出力電圧の周波数応答特性に限度がある．

定温度法は定電流法を改良した方式で，図 16 にも示されているように，流れによる熱線の抵抗変化のためＢＤ間に生じた非平衡電圧を，帰還増幅器を通してブリッジ電圧に供給し，熱線の温度と抵抗を元の大きさに回復させる方式である．そのときのブリッジ電圧と流速との関係をあらかじめ校正しておくことによって，電圧の測定から流速を求めることができる．定温度法は速度変動に対し熱線の温度が一定に保たれるので，その周波数応答性は熱線の熱的追従性にあまり関係なく，制御系の閉回路利得によって決まる．そのため，速度変動に対する応答性が優れており，気流の乱れの測定に適している．

熱線としては通常，直径１～10μm，長さ 1～3mm の白金線，タングステン線，ニッケル線などが用いられる．

水などの液体の流れの測定には，熱線の代わりに，強度と電気的絶縁を考慮した熱膜プローブが用いられる．

４．　実験方法

４．１ 水流

４．１．１　可視化観察

（１）　下流のバルブを調節することにより流量を調整する．

（２）　可視化撮影する領域内にタイムラインが２つ以上映るように，テレビモニターで確認しながら，DC パルスジェネレータのパルス間隔を設定する．その際，気泡が管壁に付着しタイムラインが見えにくくなった場合は，下流のバルブを一度全開にすることにより付着した気泡を取り除く．

（３）　画像処理ソフトを使用して，画像をパーソナルコンピュータに取り込む.

（４）　得られた画像を用いて円管中心における隣り合う２つのタイムラインの間隔を計測する．

４．１．２　圧力損失

（１）　⊿Hw を目安にして，バルブで流量を調整する．

（２）　流れ場が定常状態となった後，圧力損失差圧および水温を測定する．

（３）　流量が小さい場合には，重量法により流出質量を測定する．流出する水を容器に受けその重さと時間を測定し，さらに水の密度を考慮して流量を求める．流量が大きい場合には，オリフィスを用いて，流量を求める．

４．２ 空気流

（１）　オリフィスひずみ $\varepsilon 0$ を目安にして，バルブで流量を調整する．

（２）　流れ場が定常状態になった後，オリフィス差圧（流量），圧力損失差圧，および気温を測定する．同時に，オシロスコープおよび FFT アナライザで速度変動波形を観測しながら流量調整を細かく行い，遷移点を調べる．

５．　測定結果

５．１ 可視化観察

パーソナルコンピュータに取り込まれた画像を図 18 に示す.

図 18　水流管の流れの可視化画像

電気分解によって発生した水素気泡が見られるはずだが, 残念ながらこの画像からは確認できなかった．スケールの 20～40 の位置の，管の上の方に若干の線状になった水素気泡が見られる．

そこで，画像から管内流の速度分布式を求めるのは諦め，２．２節 Hargen-Poiseuille 流れの速度分布式(13)と流量式(14)を用いて，図 18 の流れの適当な速度分布式を求めることとする．

式(13)⇔ $v_z = -\dfrac{1}{4\mu}\dfrac{dp}{dz}\left(R^2 - r^2\right)$

式(14)⇔ $Q = -\dfrac{\pi}{8\mu}\dfrac{dp}{dz}R^4$

$$\Rightarrow\ v_z = \frac{2Q}{\pi R^4}\left(R^2 - r^2\right) = \frac{2Q}{A}\left[1 - \left(\frac{r}{R}\right)^2\right] = 2V_m\left[1 - \left(\frac{r}{R}\right)^2\right] \qquad ———(66)$$

ただし，A=πR^2，V_m；管内平均流速

いま，この円管は R=D/2=0.0065 [m]である．したがって，

$$A = \pi \times 0.0065^2 = 1.3 \times 10^{-4}\ \ [\mathrm{m^2}]$$

であり，式(16)より

式(16)⇔ $2V_m = V_{\max}$

したがって，式(66)は変数 r と最大流速 V_{max} のみの関数となる．

$$v_z = 2V_m\left[1 - \left(\frac{r}{R}\right)^2\right] = V_{\max}\left[1 - \left(\frac{r}{R}\right)^2\right] = V_{\max}\left(1 - 24000r^2\right) \qquad ———(67)$$

この流れが，層流であることを考えると，Re＜2000 なので，

ν_w＝1.0866×10^{-6}　(T=290[K]の水動粘度, 熱物性ハンドブック[5])より)

を用いて，

$$\mathrm{Re} = \frac{V_m D}{\nu_w} = \frac{V_{\max} D}{2\nu_w} < 2000 \quad \Leftrightarrow\ V_{\max} < \frac{4000\nu_w}{D} = 0.33\ \ [\mathrm{m/s}] \qquad ———(68)$$

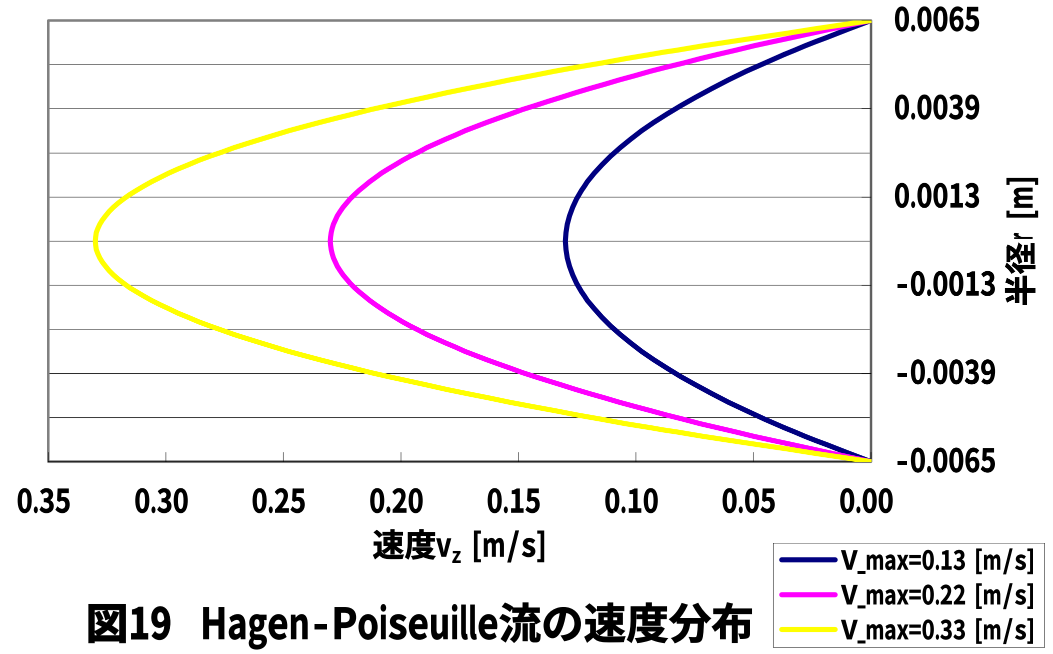


図19　Hagen-Poiseuille流の速度分布

図 19 に例として，最大流速 V_{max}＝0.13, 0.22, 0.33 の３通りの速度分布を示す．図 18 の可視化画像は単独の水素気泡しか確認できず，タイムラインの間隔が確認できないため，V_{max} も算出不可能であり，流れの可視化に対してはこれ以上の考察は行わないこととする．

５．２ 圧力損失の測定および管摩擦係数λの算出

５．２．１ 水流

物理定数：重力加速度：$g = 9.80665$ [m/s2]

管条件：亜鉛引き鋼管，管内径：2.78×10^{-2} [m]，管長：$\ell = 1.50$ [m]

まず，流量および平均速度を求める準備として，測定した水温 t_w とその温度での水密度 ρ_w と水銀密度 ρ_{Hg} を表２に示す．ただし，水密度と水銀密度は「熱物性値ハンドブック[5)]」の数値を直線補間したものである．

表２　水温 t_w（測定値）
および水密度 ρ_w と水銀密度 ρ_{Hg}（熱物性値ハンドブックより）

No.	水温 t_w [℃]	水密度 ρ_w [kg/m^3]	水銀密度 ρ_{Hg} [kg/m^3]
1	18.2	998.498	13550.25
2	18.2	998.498	13550.25
3	18.2	998.498	13550.25
4	18.2	998.498	13550.25
5	18.2	998.498	13550.25
6	18.2	998.498	13550.25
7	18.9	998.341	13548.53
8	18.6	998.408	13549.27

つぎに，オリフィスと水の重量測定より流量を求める．
まず，オリフィスを用いる場合は，オリフィスの流量式(62)より，

$$Q = \alpha \frac{\pi D_{orif}}{4}\sqrt{\frac{2\varDelta p_{orif}}{\rho_w}}$$

α＝0.6632，D_{orif}=1.60×10^{-2}[m]；orifice 内径

で求められ，また⊿p_{orif}は水銀マノメータの式(63)にそれぞれ $\varDelta H_{Hg} = H_1 - H_2$ の値と水，水銀の密度および重力加速度を代入して求める．

$$(63) \Leftrightarrow \quad \varDelta p_{orif} = (\rho_{Hg} - \rho_w) g \varDelta H_{Hg}$$

また，平均速度は流量 Q を用いて，

$$V_m = \frac{Q}{A} \ \text{[m/s]}$$

ただし，$A = \frac{\pi D^2}{4}$ [m²]；管流路断面積

これら，水銀マノメータの測定値および流量 Q と平均速度 V を表３に示す．

表３　水銀マノメータの測定値および流量 Q と平均流速 V

No.	orifice 差圧				√（2⊿p_{orif}/ρ$_w$）	流量	平均流速
	H_1 [cm]	H_2 [cm]	⊿H_{Hg} [m]	⊿p_{orif} [Pa]	[m/s]	Q [m³/s]	V [m/s]
1	74.820	30.220	0.44600	54898	10.486	1.3983 ×10^{-3}	2.3036
2	64.300	42.835	0.21465	26421	7.2748	9.7005 ×10^{-4}	1.5981
3	59.185	49.095	0.10090	12420	4.9877	6.6508 ×10^{-4}	1.0957
4	56.765	52.000	0.04765	5865.3	3.4276	4.5705 ×10^{-4}	0.75297
5	55.475	53.605	0.01870	2301.8	2.1472	2.8632 ×10^{-4}	0.47170
6	55.120	54.100	0.01020	1255.5	1.5858	2.1146 ×10^{-4}	0.34838

一方，重量測定法で流量 Q を求めると，単位時間あたりに排出された水の体積が流量になるはずなので，流量 Q は次式で求めることができる．

$$Q = \frac{\text{体積}}{\text{排出時間}} = \frac{\varDelta M}{\rho_w} \Big/ \tau = \frac{M_1 - M_2}{\tau \rho_w} \ \text{[m}^3\text{/s]}$$

表４　重量法による流量 Q および平均流速 V

No.	計測時間 τ [s]	容器重さ M1 [g]	はかり重さ M2 [g]	流出質量 ⊿M [kg]	流量 Q [m³/s]	平均流速 V [m/s]
7	29.93	320	4700	4.380	1.4658 ×10^{-4}	0.24150
8	50.14	320	5415	5.095	1.0178 ×10^{-4}	0.16768

また，圧力損失は，水マノメータの測定値を式(61)に代入することで⊿pを求めることができる．

$$\varDelta p = \rho_w g \varDelta H_w = \rho_w g (H_1 - H_2) \ \text{[Pa]}$$

水動粘度ν$_w$・レイノルズ数 Re・管摩擦係数λは以下の式で求められる．

$$\nu_w = \frac{1.792 \times 10^{-6}}{1 + t_w / 28.05 + t_w^2 / 5459} \ \text{[m2/s]},$$

$$\mathrm{Re} = \frac{V \cdot D}{\nu_w}, \qquad (20) \Leftrightarrow \lambda = \frac{\varDelta P}{(\ell / D) \cdot (\rho_w V^2 / 2)}$$

表５　水流実験のレイノルズ数と管摩擦係数

No.	圧力損失 (差圧)					水動粘度	Reynolds数	管摩擦係数
	バルブ設定	H_1 [cm]	H_2 [cm]	⊿H_w [m]	⊿p [Pa]	ν_w [m^2/s]	Re	λ
1	400(全開)	79.030	39.185	0.39845	3901.6	1.0482×10^{-6}	61094	0.027293
2	200	80.890	61.020	0.19870	1945.7	1.0482×10^{-6}	42383	0.028280
3	100	80.700	70.670	0.10030	982.13	1.0482×10^{-6}	29059	0.030368
4	50	80.550	75.475	0.05075	496.94	1.0482×10^{-6}	19969	0.032537
5	20	80.275	78.185	0.02090	204.65	1.0482×10^{-6}	12510	0.034144
6	10	80.225	79.075	0.01150	112.61	1.0482×10^{-6}	9239.1	0.034443
7	5	80.190	79.600	0.00590	57.763	1.0303×10^{-6}	6515.9	0.036774
8	2	80.170	79.865	0.00305	29.863	1.0380×10^{-6}	4491.0	0.039433

５．２．２ 空気流

管条件：滑らかな管（ステンレス製），管内径：$D = 1.028 \times 10^{-2}$ [m]，管長：$\ell = 2.00$ [m]

まず，空気温度の測定値 t_a より空気密度ρ$_a$と空気動粘度ρ$_w$を求める．

空気密度ρ$_a$は，理想気体の状態方程式 $p/\rho = RT$ より，

$$\frac{p_0/\rho_0}{p_1/\rho_1} = \frac{RT_0}{RT_1} \qquad \Leftrightarrow \rho_1 = \rho_0 \frac{p_1}{p_0} \cdot \frac{T_0}{T_1} \quad [\mathrm{kg/m^3}]$$

また，空気の動粘度は以下の式で求めることができる．

$$\nu_a = 13.33 \times 10^{-6} \times \frac{(1 + t_a/273.15)^{2.5}}{1 + t_a/380} \cdot \frac{101325}{p_a} \quad [\mathrm{m^2/s}]$$

表６　空気密度ρ$_a$および空気動粘度ν$_a$

No.	気温 t_a [℃]	空気密度 ρ_a [kg/m^3]	空気動粘度 ν_a [m^2/s]
1	22.5	1.1872	1.543×10^{-5}
2	22.5	1.1872	1.543×10^{-5}
3	22.5	1.1872	1.543×10^{-5}
4	22.5	1.1872	1.543×10^{-5}
5	22.5	1.1872	1.543×10^{-5}
6	22.5	1.1872	1.543×10^{-5}
7	22.5	1.1872	1.543×10^{-5}
8	22.5	1.1872	1.543×10^{-6}
9	22.5	1.1872	1.543×10^{-6}
10	22.5	1.1872	1.543×10^{-5}
遷移点	22.5	1.1872	1.543×10^{-5}

orifice 差圧：$\varDelta p_{orif} = 1.790 \varepsilon_{orif}$ [Pa]

orifice Reynolds 数：$\mathrm{Re}_{orif} = \frac{V_{orif} \cdot D_{orif}}{\nu_a} = \frac{D_{orif}}{\nu_a} \sqrt{\frac{2\Delta p_{orif}}{\rho_a}}$ [m/s]

（$D_{orif} = 6.00 \times 10^{-3}$ [m]：orifice 内径）

orifice 係数：$\alpha = 0.1505(\log_{10}\mathrm{Re}_{orif})^2 - 1.329(\log_{10}\mathrm{Re}_{orif}) + 3.603$

$$\Rightarrow \quad 流量：Q = \alpha\frac{\pi D_{orif}}{4}\sqrt{\frac{2\varDelta p_{orif}}{\rho_a}}\ [\mathrm{m3/s}]$$

平均流速：$V = \dfrac{Q}{A}$ [m/s]　　　ただし $A = \dfrac{\pi D^2}{4}$ [m2]は管流路断面積

表７　空気流の流量 Q と平均流速 V

No.	orifice 差圧								
	ε_{orif}		$\varDelta p_{orif}$ [Pa]	$\sqrt{}(2\varDelta p_{orif}/\rho_a)$	orifice Re_{orif}	$\log_{10}\mathrm{Re}_{orif}$	orifice係数 α	流量 Q [m^3/s]	平均流速 V [m/s]
	目標値	測定値							
1	20	22.0	39.380	8.1449	3166.4	3.5006	0.79497	1.8307 $\times10^{-4}$	2.2057
2	30	31.0	55.490	9.6684	3758.6	3.5750	0.77530	2.1194 $\times10^{-4}$	2.5535
3	50	50.5	90.395	12.340	4797.3	3.6810	0.75019	2.6175 $\times10^{-4}$	3.1536
4	75	75.5	135.15	15.089	5865.7	3.7683	0.73204	3.1230 $\times10^{-4}$	3.7627
5	120	118.0	211.22	18.863	7333.1	3.8653	0.71457	3.8111 $\times10^{-4}$	4.5917
6	190	188.0	336.52	23.810	9256.1	3.9664	0.69937	4.7081 $\times10^{-4}$	5.6725
7	290	290.5	520.00	29.597	11506	4.0609	0.68794	5.7569 $\times10^{-4}$	6.9361
8	450	449.5	804.61	36.816	14312	4.1557	0.67918	7.0700 $\times10^{-4}$	8.5181
9	700	700.5	1253.9	45.960	17867	4.2521	0.67305	8.7462 $\times10^{-4}$	10.538
10	1100(全開)	1086.0	1943.9	57.225	22247	4.3473	0.66974	10.836 $\times10^{-4}$	13.056
遷移点		57.0	102.03	13.110	5096.7	3.7073	0.74448	2.7597 $\times10^{-4}$	3.3249

圧力損失：$\varDelta P = 0.627\varepsilon_{loss}$ [Pa]

Reynolds 数：$\mathrm{Re} = \dfrac{V \cdot D}{\nu_a}$

管摩擦係数：$\lambda = \dfrac{\varDelta P}{(\ell/D)\cdot(\rho_a V^2/2)}$

表８　空気流の圧力損失とレイノルズ数および管摩擦係数

No.	圧力損失 (差圧)		Reynolds数 Re	管摩擦損失 λ
	ε_{loss}	$\varDelta$p [Pa]		
1	39.0	24.453	1469.2	0.043520
2	45.0	28.215	1700.8	0.037467
3	57.8	36.241	2100.5	0.031553
4	112.0	70.224	2506.2	0.042949
5	169.0	105.96	3058.4	0.043517
6	248.0	155.50	3778.2	0.041844
7	359.0	225.09	4619.9	0.040512
8	514.0	322.28	5673.6	0.038459
9	748.0	469.00	7018.8	0.036571
10	1077.0	675.28	8696.2	0.034302
遷移点	78.0	48.906	2214.6	0.038305

６．　考察・検討・課題

６．１ グラフの作成

式(21)より，Hagen-Poiseuille の式は，　$\lambda = \dfrac{64}{\mathrm{Re}}$　　――― (21)

式(55)より，Prandtl-Kalman の式は,

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = 2\log_{10}\left(\mathrm{Re}\sqrt{\lambda}\right) - 0.8$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{1}{2\sqrt{\lambda}} = \log_{10}\mathrm{Re} + \log_{10}\sqrt{\lambda} - 0.4$$

$$\Leftrightarrow \quad \log_{10}\mathrm{Re} = \frac{1}{2\sqrt{\lambda}} - \log_{10}\sqrt{\lambda} + 0.4$$

$$\therefore \mathrm{Re} = 10^{\frac{1}{2\sqrt{\lambda}} - \log_{10}\sqrt{\lambda} + 0.4} = \frac{1}{\sqrt{\lambda}} 10^{\left(\frac{1}{2\sqrt{\lambda}} + 0.4\right)} \qquad ――― (69)$$

式(57)より，Blasius の式は，　$\lambda = 0.3164\,\mathrm{Re}^{-0.25}$　　――― (57)

また，式(58)より，Colebrook の式は,

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = -2\log_{10}\left(\frac{2.51}{\mathrm{Re}\sqrt{\lambda}} + \frac{1}{3.71}\frac{k}{D}\right)$$

$$\Leftrightarrow \quad 10^{-\frac{1}{2\sqrt{\lambda}}} = \frac{2.51}{\mathrm{Re}\sqrt{\lambda}} + \frac{1}{3.71}\frac{k}{D}$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{k}{D} = 3.71\left(10^{-\frac{1}{2\sqrt{\lambda}}} - \frac{2.51}{\mathrm{Re}\sqrt{\lambda}}\right) \qquad ――― (70)$$

式(70)を用いて，水流，空気流の k/D の値を算出する．

まず, 水流ではすべてのレイノルズ数の値が臨界レイノルズ数を超えた値となっているので，全区間の値を式(70)に代入し，得られた平均の値を k/D 値とする．

表９　水流・k/D 値

No.	管摩擦係数λ	√λ	k/D
1	0.027293	0.16520	0.0025674
2	0.028280	0.16817	0.0026391
3	0.030368	0.17426	0.0031749
4	0.032537	0.18038	0.0036875
5	0.034144	0.18478	0.0032738
6	0.034443	0.18559	0.0020724
7	0.036774	0.19176	0.0017100
8	0.039433	0.19858	0.00081618
平均			0.0024926

したがって，水流の亜鉛引き鋼管の k/D 値は,

$$\frac{k}{D} = 0.0024926 \qquad ――― (71)$$

一方, 空気流では前半の測定値が層流状態であるため, k/D 値の算出に当たって測定 No.7 ～No.10 までの k/D 値をステンレス管の値とする.

表 10　空気流の k/D 値

No.	λ	√λ	k/D
7	0.040512	0.20128	0.0021541
8	0.038459	0.19611	0.0020970
9	0.036571	0.19124	0.0020738
10	0.034302	0.18521	0.0016262
平均			0.0019878

したがって,　ステンレス管の k/D 値は,

$$\frac{k}{D} = 0.0019878 \qquad ——— (72)$$

これらの, k/D の値を式(70)に代入して Re - λ曲線をグラフにしたいが, このままの形では値が求めづらいので式変形を行う.

$$\text{式(70)} \Leftrightarrow \quad \frac{k}{D} = 3.71\left(10^{-\frac{1}{2\sqrt{\lambda}}} - \frac{2.51}{\mathrm{Re}\sqrt{\lambda}}\right)$$

$$\mathrm{Re} = \frac{2.51}{\sqrt{\lambda}} \Bigg/ \left(10^{-\frac{1}{2\sqrt{\lambda}}} - \frac{1}{3.71}\frac{k}{D}\right) \qquad ——— (73)$$

よって, これまで求めてきた, 測定値・Hagen-Poiseuille の式・Prandtl-Kalman の式・Blasius の式・Colebrook の式をグラフにすると, 図 20 のようになる.

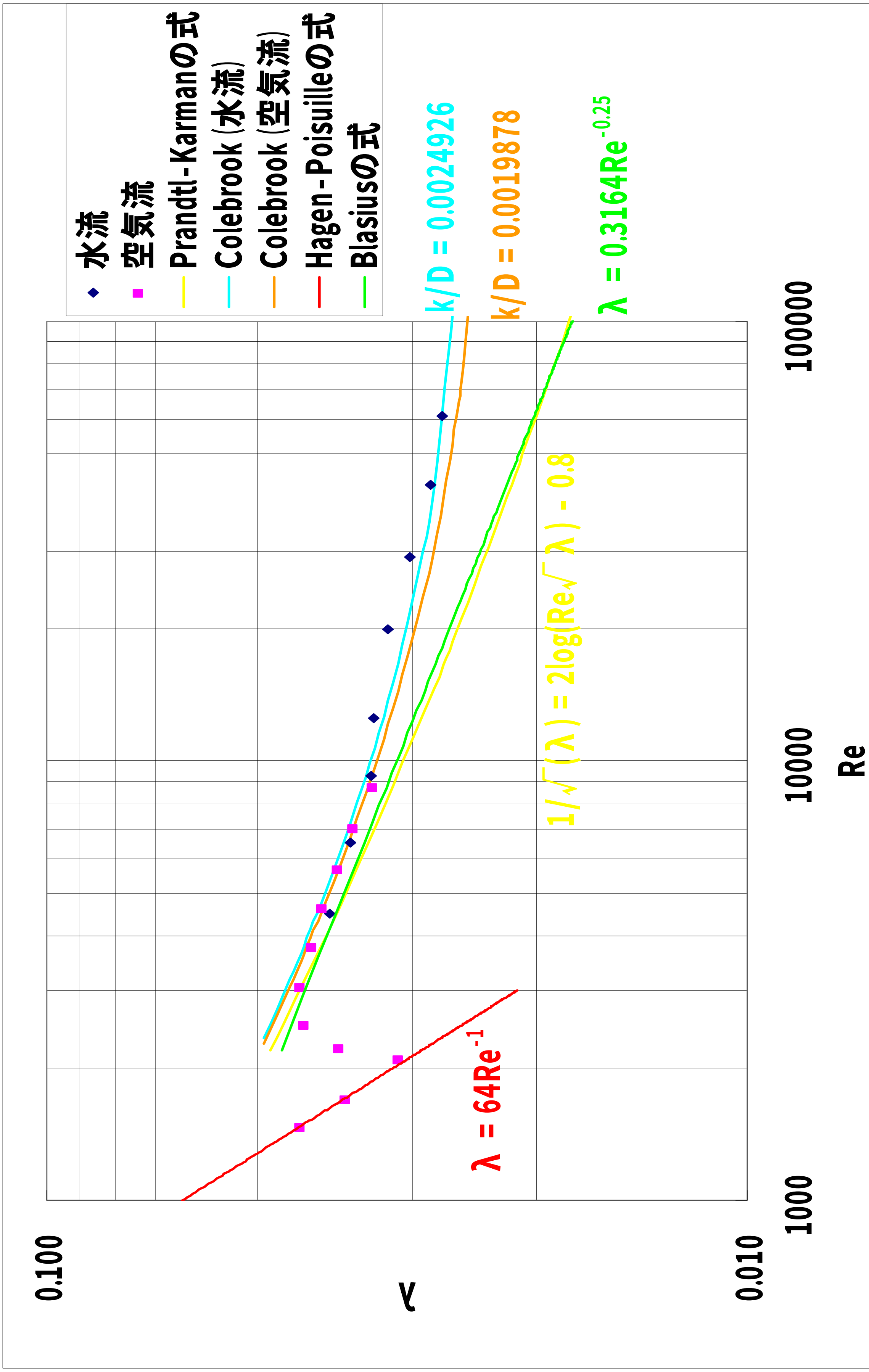

水流
空気流
Prandtl-Karmanの式
Colebrook（水流）
Colebrook（空気流）
Hagen-Poisuilleの式
Blasiusの式
k/D = 0.0024926
k/D = 0.0019878
λ = 0.3164Re^-0.25
1/√（λ）= 2log(Re√ λ) - 0.8
λ = 64Re^-1
0.100
0.010
λ
1000
10000
100000
Re

図20　Re-λ線図

６．２ 考察・検討

（１） 実験測定値と理論式；Hagen-Poiseuille の式，Prandtl-Kalman の式，Blasius の式，Colebrook の式との比較検討．

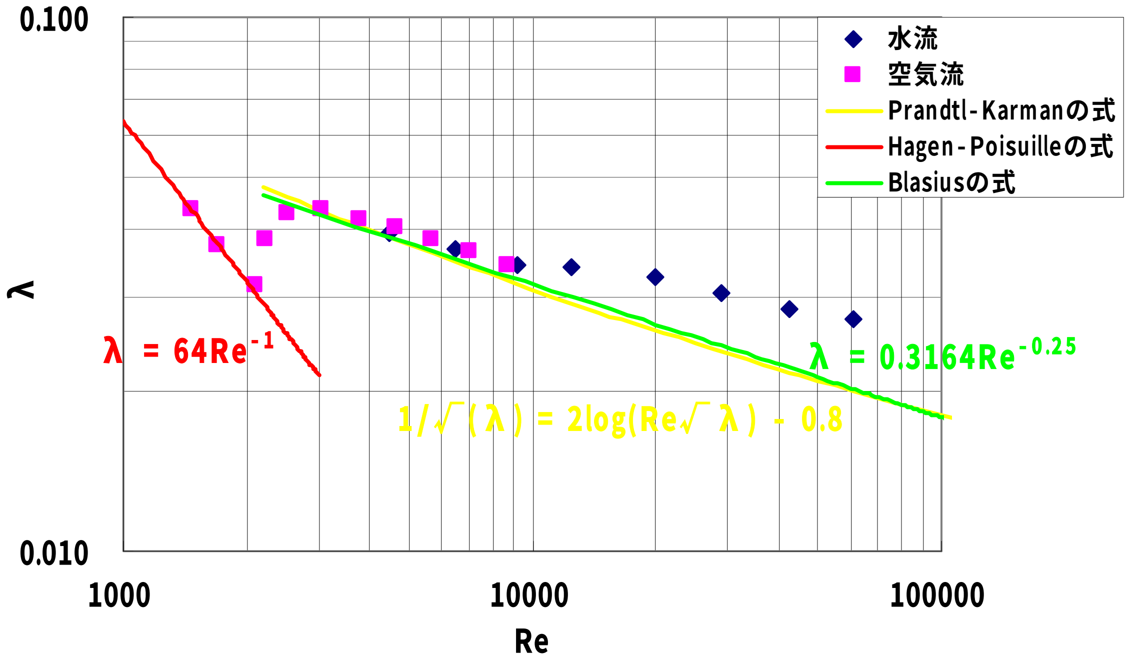


図21 Re-λ線図

図 21 に測定値と Hagen-Poiseuille の式，Prandtl-Kalman の式，Blasius の式を示す．

層流区間では，Hagen-Poiseuille の式と測定結果が理論どおり一致していることが伺える．また，乱流の理論式 Prandtl-Kalman の式と Blasius の式はレイノルズ数が 100000 以下では一致していることが確認できるので，この範囲のレイノルズ数では管摩擦係数を求める際に近似式の Blasius の式を用いても問題ないことが確認できる．

一方，乱流の測定値を見ると，レイノルズ数が 3000～4500 程度の低い状態の乱流では Prandtl-Kalman の式や Blasius の式に近い値を示すが一致するとはいえない．例えば，空気流では，表 11（p.37）を見るとレイノルズ数が 4500 を超えたところから急に差率が大きくなる．水流の測定値と Prandtl-Kalman の式および Blasius の式を比較すると，レイノルズ数が 20000 を超えたところでは管摩擦係数λの差率は 25%を超えて，測定値が大きく Prandtl-Kalman の式と Blasius の式から外れるのが分かる．これは，２．５節でも述べたが，レイノルズ数が大きくなると粘性底層が薄くなり，壁面粗さが表に出てきてしまいλの値が大きくなっていく．そしてさらにレイノルズ数が増加していって Re ≫ δ_v となると壁面には粘性底層完全に粗くなる．そのため，レイノルズ数が大きくなると Prandtl-Kalman の式および Blasius の式から測定値が外れると考えられる．

これを補正したものが Colebrook の式であり，図 22・図 23（p.36）を見ても Colebrook の式にうまく合わさる形になった．表 11，表 12 で差率をみても，空気流では特異な一点を除けばすべて 2%以下であり，水流でも高レイノズル数では 5～10%程度の差が出てしまったが，補正前に較べれば 1/3 程度である．

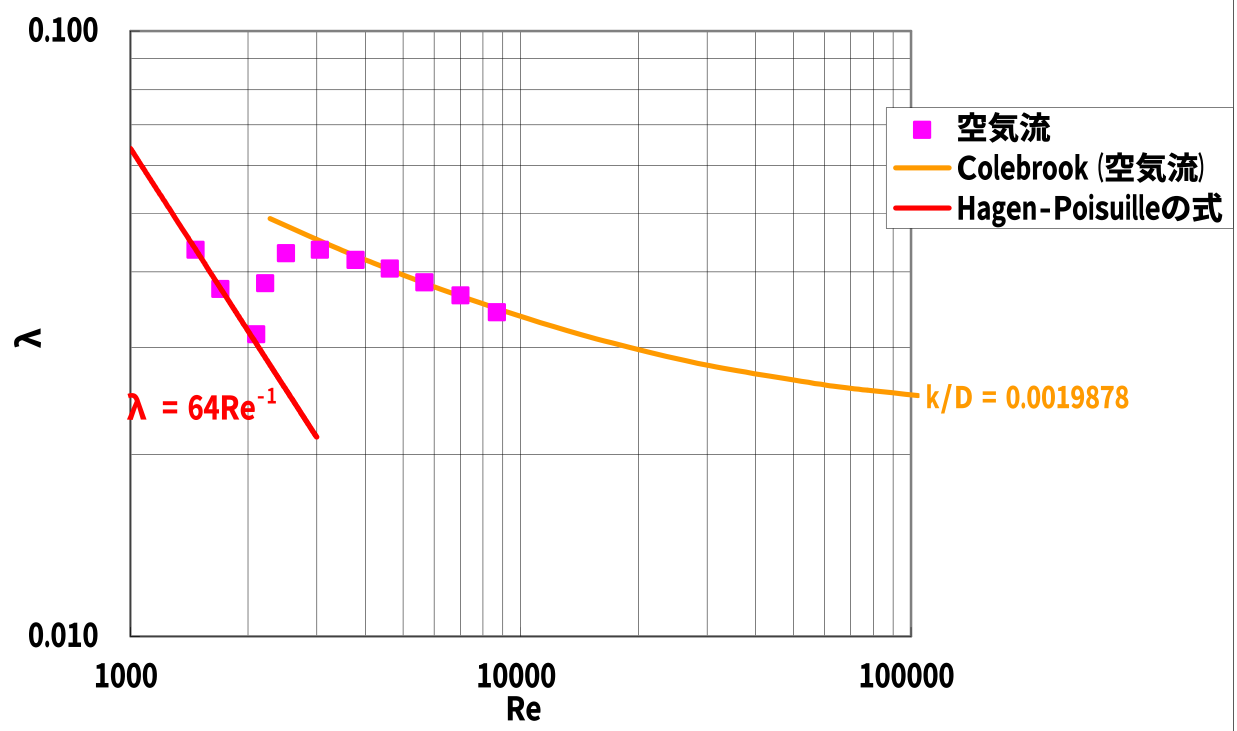


図22　空気流　Re-λ線図

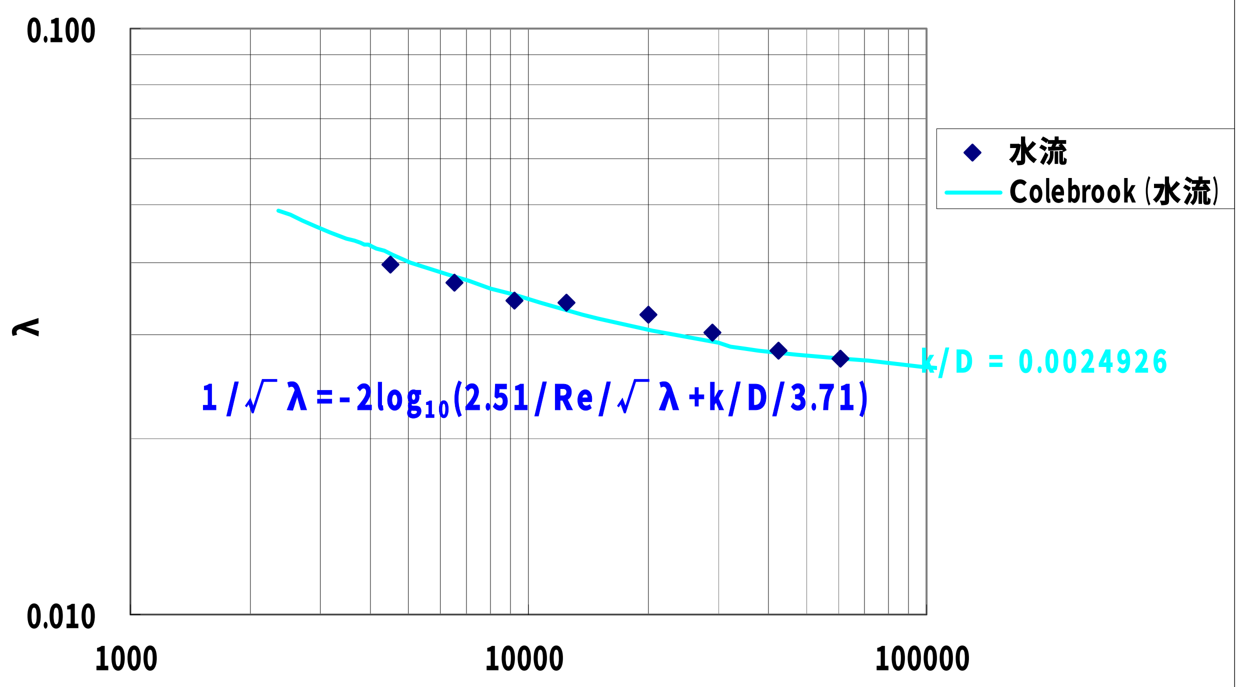


図23　水流Re-λ線図

表 11　空気流・各式の管摩擦係数および差率

Reynolds数	管摩擦係数	Prandtl-Kalmanの式		Blasiusの式		Colebrooknの式	
Re	λ_{ex}	$\lambda_{th\text{-}PK}$	差率 [%]	$\lambda_{th\text{-}B}$	差率 [%]	$\lambda_{th\text{-}C}$	差率 [%]
3058.4	0.043517	0.043273	0.56454	0.042546	2.2815	0.045030	3.3606
3778.2	0.041844	0.040597	3.0699	0.040357	3.6850	0.042511	1.5688
4619.9	0.040512	0.038265	5.8722	0.038378	5.5625	0.040343	0.42045
5673.6	0.038459	0.036076	6.6076	0.036456	5.4948	0.038339	0.31445
7018.8	0.036571	0.033992	7.5873	0.034568	5.7954	0.036468	0.28248
8696.2	0.034302	0.032063	6.9821	0.032765	4.6918	0.034776	1.3643

表 12　水流・各式の管摩擦係数および差率

Reynolds数	管摩擦係数	Prandtl-Kalmanの式		Blasiusの式		Colebrooknの式	
Re	λ_{ex}	$\lambda_{th\text{-}PK}$	差率 [%]	$\lambda_{th\text{-}B}$	差率 [%]	$\lambda_{th\text{-}C}$	差率 [%]
61094	0.027293	0.019990	36.531	0.020125	35.615	0.025981	5.0483
42383	0.028280	0.021686	30.403	0.022051	28.244	0.026921	5.0449
29059	0.030368	0.023664	28.330	0.024234	25.314	0.028177	7.7751
19969	0.032537	0.025898	25.637	0.026616	22.246	0.029765	9.3140
12510	0.034144	0.029132	17.204	0.029917	14.127	0.032303	5.6992
9239.1	0.034443	0.031546	9.1826	0.032272	6.7272	0.034331	0.32733
6515.9	0.036774	0.034700	5.9762	0.035216	4.4227	0.037099	0.87732
4491.0	0.039433	0.038582	2.2062	0.038650	2.0253	0.040635	2.9582

ここで，差率とは，

$$[\text{差率}] = \frac{|\lambda_{ex} - \lambda_{th}|}{\lambda_{th}} \quad [\%]$$

で表すものとする．

（２）　水流と空気流の k/D 値を比較検討

図 24（p.38）に Moody により調べられた実用管の等価相対砂粒粗さを図表にまとめた Moody 線図を示す．

今回の測定値での砂粒径ｋの値は，

$$\text{水流：} k = \frac{k}{D} \cdot D = 0.0024926 \times 27.8 = 0.0693 \ \ [\mathrm{mm}]$$

$$\text{空気流：} k = \frac{k}{D} \cdot D = 0.0019878 \times 10.28 = 0.02043 \ \ [\mathrm{mm}]$$

しかし，図 24 によると，

亜鉛引き鉄管：ｋ＝0.18 [mm]

一般鋼・錬鉄鋼：ｋ＝0.05 [mm]

と，共に測定値の 2.5 倍程度の砂粒径である．仮に，今の図 24 にあるｋの値を用いて Colebrook の式に当てはめ，Moody 線図を描くと図 25（p.38）となる．

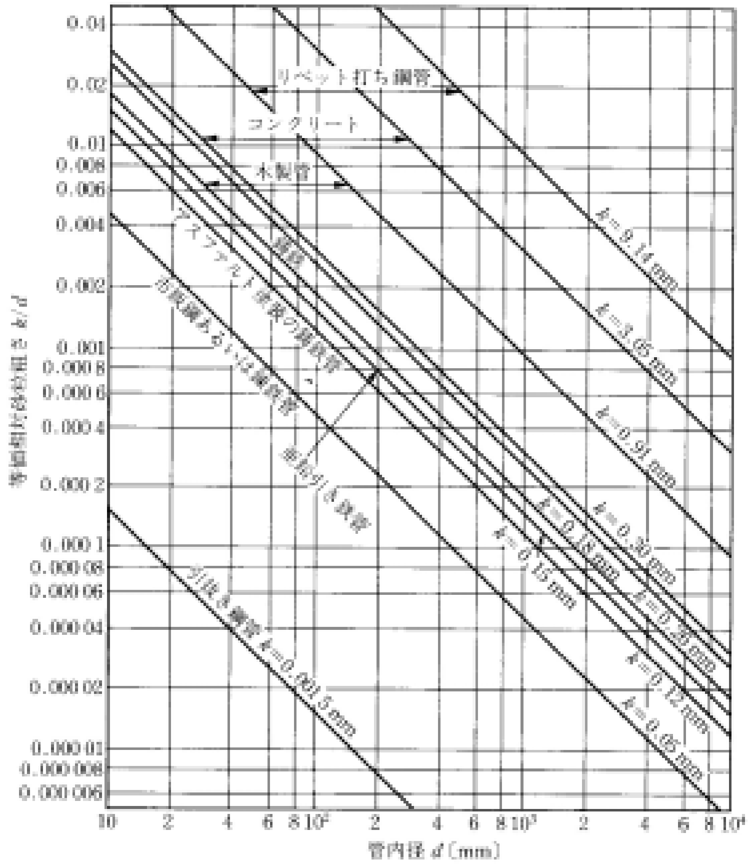


図 24　実用管に対する k/D の値[1]

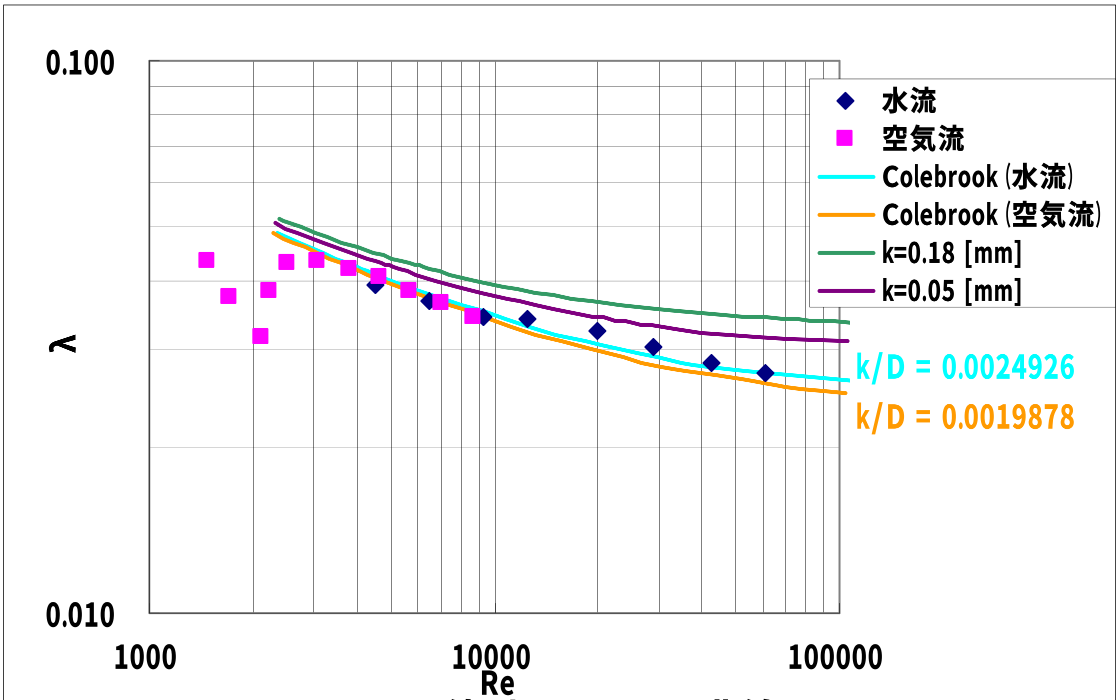


図25　k/Dの値別Coolebrook曲線

やはり,測定値との差があることが見て取れる.原因としては,測定誤差も考えられるが,それよりも文献値の管と実験に使用した管が同じか否かを考えねばならない.同じ材質といっても，製造法や加工法，使用状態，使用時間などにより館内壁粗さの値は変わってくるため，今回はこれ以上文献値と比較はしない.

一方，水流と空気流の比較をすると，図 20 を見ても分かるようにレイノルズ数が 10^4 以下では，流体も管も異なるにもかかわらず管摩擦係数が近い値をとったことが分かる．したがって，理論どおりレイノルズ数がそれほど高くない範囲（$Re<10^4$）では管摩擦係数はレイノルズ数に依存することが確認できた

（3） 遷移域における波形の観察

オシロスコープで観察した遷移状態の波形のスケッチを図 26 に示す.

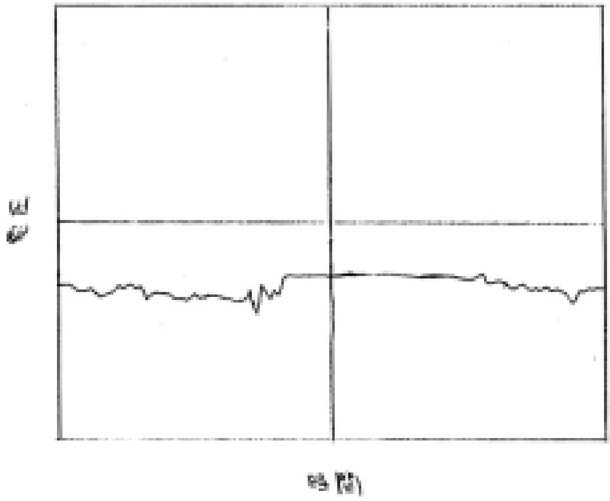


図 26 遷移域の波形のスケッチ（山下君による）

熱線流速計は,流体によって奪われた熱量を熱線から発生する起電力を読み取ることによって流速を測定するものであり,オシロスコープにはそのときの電圧と時間の座標で波形があらわれる.

波形を見ると,速度が乱れている乱流状態と速度が一定の層流状態とが入り混じっていることが分かる.

しかし，このスケッチは正確なものとは言えず，実際にオシロスコープを眺めていると，直線状態の層流と乱れた状態の乱流とが瞬間的に入れ替わり波形が２本あるように見えて，正確なスケッチは不可能であった.

６．３ 課題

（1） 層流域において，$V_m \approx 0.5V_{\max}$ であることを導出せよ.

p.９ 式(16)参照.

（2） 管摩擦係数と局所壁面摩擦係数の関係式 $C_f = \lambda/4$ を，力の釣り合いから導出せよ.

ｐ.13, 14 式(40)〜(43)参照.

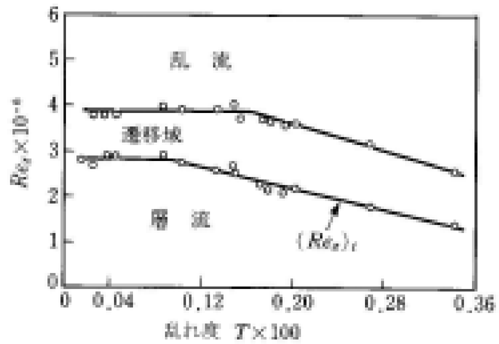
（3） **遷移 Reynolds 数を文献値と比較検討せよ．**

コロナ社「流体力学の基礎（1）」p73[1]によると，流れが層流を保つレイノルズ数の臨界値は，管に流入する流れの乱れ度により変化するが（参考図[2]参照），通常の状態では約 2300 である．従って，遷移レイノルズ数は 2300 をやや上回った値になる．

今回，実験で得られた遷移レイノルズ数は 2214.6．若干に文献値を下回ったが，差率は，

$$\frac{|2300-2214.6|}{2214.6}=3.9 \quad [\%]$$

である．文献値の値が曖昧であること，バルブが一般的なハンドルで微妙な調整を行うのには不向きであり，遷移状態に調整することが困難だったことを考えると妥当な測定結果であるといえる．



参考図　遷移レイノルズ数に及ぼす主流の乱れ度の影響
（シュバウアーらによる実験結果）

7． 結言

実験の目的である流体の管摩擦係数の測定値と理論値の比較において，理論で導き出した式に測定値が重なることが確認できた．また，Prandtl-Kalman の式はレイノルズ数が 10^5～10^6 の範囲では Blasius の式と重なることが確認でき，この範囲であれば数値の求めやすい Blasius の式を用いても問題がないことも見て取れる．乱流状態でレイノルズ数が 10^4 を下回る状態では等価相対砂粒粗さの影響は出ないが，Re＞10^4 では Prandtl-Kalman の式や Blasius の式は適応できず，等価相対砂流粗さの値と Colebrook の式を考慮しなければならなくなることも確認できた．

ただ，残念ながら流れの可視化や遷移域における波形は十分な確認ができなかった．

≪参考文献≫

1）中林功一・伊藤基之・鬼頭修己 共著　流体力学の基礎(1)，（2002）　コロナ社　p.70～82
2）中林功一・伊藤基之・鬼頭修己 共著　流体力学の基礎(2)，（2002）　コロナ社　p.58～60，p.87～91
3）日野幹夫 著　流体力学，（1994）　朝倉書店　p.158～161
4）島章・小林陵二 著　水力学，（1980）　丸善株式会社　p.176～202
5）熱物性ハンドブック，（1990）　養賢堂　p.64～65，p.102～103