

1. 目的

現代の機械では制御されていないものはないというくらい、制御工学は機械工学と切っぴは切り離せない関係にある。ロケットやロボットなどハイテク機械には当然のことながら、家電製品など日常品にも制御装置は付いている。例えば調理器具などでは温度・圧力を「制御」して焦げ付かずだれでも簡単に料理ができるし、洗濯機などはボタンを押すだけで水量、洗い時間を調整（制御）して、乾燥までしてくれる。これらには、現在授業で学んでいる古典制御理論ではなく、コンピュータ・ソフトウェアを用いた電子制御が応用されている。

近年、コンピュータのソフトウェア・ハードウェアおよびセンサ技術は急速に進歩し、これまでに無かった分野にも制御工学が入り込み、これからは、よりいっそう制御工学が重要視されている。

今回は、制御理論の基礎である周波数応答によるシステムの同定がテーマである。周波数応答を用いた古典制御理論は、1950年代には完成しており、その後の状態方程式によってシステムを記述する、いわゆる現代制御理論が華やかに登場し多くの研究がなされた。さらにここ数十年は、現代制御理論の成果を取り入れ再び周波数領域で制御系を設計するロバスト制御、 H_∞ 制御などの理論が研究され、実際問題への適用が試みられている。したがって、この周波数応答の実験は単なる古典制御理論の一つではなく、現代制御理論へと繋がる基礎事項である。

本実験では、簡単なCR回路の特性を周波数応答法により解析し、その伝達関数の係数を最小2乗法により決定する。これにより周波数応答の物理的意味を理解することが今回の目的である。

2. 基礎事項

2.1 周波数応答

(1) ゲインと位相

システムの入力信号が正弦波の場合の定常応答を周波数応答という。線形かつ安定なシステムに正弦波を加えた場合、定常状態において出力信号も同じ周波数を持つ正弦波になる。すなわち、入力信号として正弦波

$$u(t) = A \sin \omega t \quad \text{---- (1)}$$

を加えると定常状態の出力は

$$y(t) = B \sin(\omega t + \phi) \quad \text{---- (2)}$$

と表される。このため入出力信号間の関係は振幅比 $|B/A|$ と位相差 ϕ を用いて表すことができる。この振幅比 $|B/A|$ 周波数応答のゲイン、位相差 ϕ を位相という。このゲインと位相は各周波数 ω により変化する。

この周波数応答の概略図を図1に示す。

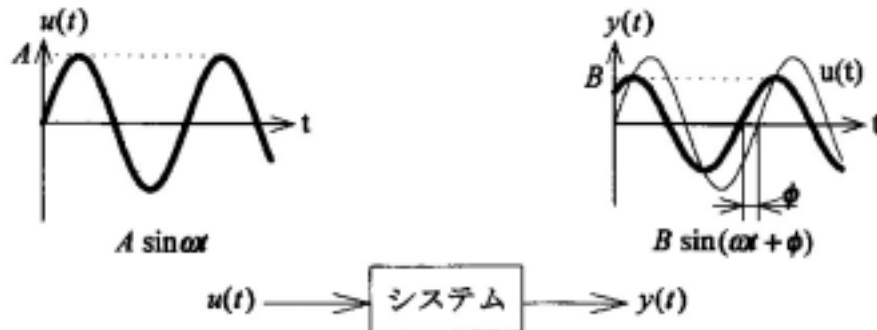


図1 周波数応答

さて、式(1)は横軸に電気角度 ωt [rad] を、縦軸に $u(t)$ の値をとった正弦波信号の瞬間値表示であるが、図2のように、大きさが A の動径が各速度 ω で回転するときの縦方向の投影の大きさで表示することもできる。この動径の位置は、

$$U(j\omega) = A e^{j\omega t} \quad \text{---- (3)}$$

となり、 $U(j\omega)$ の虚数部分が $u(t)$ を表すこととなる。同様に、出力も

$$Y(j\omega) = B e^{j(\omega t + \phi)} \quad \text{---- (4)}$$

と表すことができる。

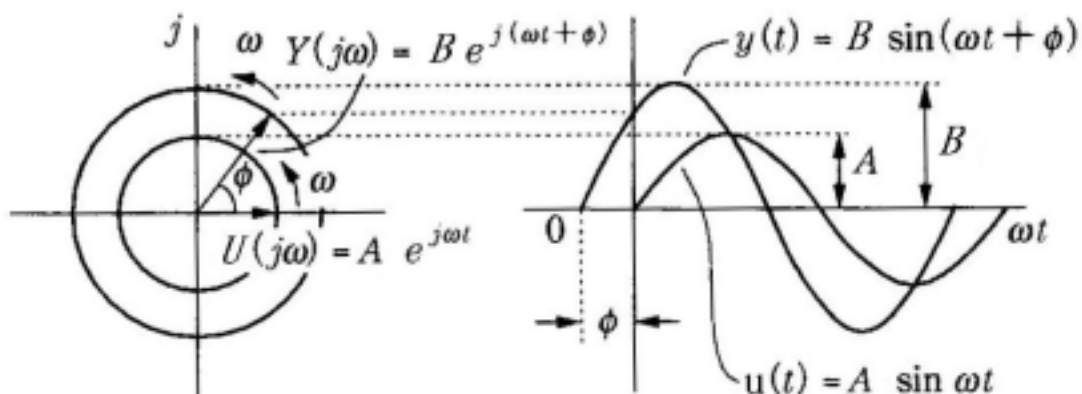


図2 正弦波信号の複素ベクトル表示

式(3),(4)は複素平面上を回転しているベクトルと考えることができる．ここで注意すべきことは、 $U(j\omega)$ と $Y(j\omega)$ は同じ角速度 ω で回転しているので、両者の相対的な位置関係は時間に依存せず、一定である．したがって、入力 U と出力 Y は角周波数 ω によって決まる定ベクトル $U(j\omega), Y(j\omega)$ として扱うことができ、図3のような静止ベクトルとなる．

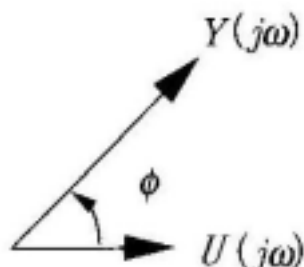


図3 正弦波入出力信号の静止ベクトル表示

ここで、 $U(j\omega), Y(j\omega)$ は、 $u(t), y(t)$ をラプラス変換形 $U(s), Y(s)$ において $s = j\omega$ としたものであり、前述のようにそれぞれ入出力の振幅スペクトルである．

$$U(j\omega) = A \cdot 1 = A \angle 0 \quad \text{--- (5)}$$

$$Y(j\omega) = B e^{j\phi} = B \angle \phi \quad \text{--- (6)}$$

(2) 周波数伝達関数

システムの伝達関数 $G(s)$ において s を $j\omega$ に置換した関数 $G(j\omega)$ を周波数伝達関数という．ただし、 $j = \sqrt{-1}$ である．周波数伝達関数 $G(j\omega)$ は式(5),(6)で表された入力と出力の比であるので、

$$G(j\omega) = \frac{U(j\omega)}{Y(j\omega)} = \frac{B}{A} e^{j\phi} = \frac{B}{A} \angle \phi \quad \text{--- (7)}$$

となり、時間 t を含まない角周波数 ω の関数となる．式(7)は極座標形式による表示で、この周波数伝達関数 $G(j\omega)$ の絶対値 $|G(j\omega)| = |B/A|$ を周波数応答のゲイン、 ϕ を位相と呼び、両者とも ω の関数となる．さらに、オイラーの公式： $e^{j\theta} = \cos \theta + j \sin \theta$ を用いると式(7)は次式のように直交座標形式で表せる．

$$G(j\omega) = \frac{B}{A} \cos \phi + j \frac{B}{A} \sin \phi \quad \text{--- (8)}$$

また、 $G(j\omega)$ が、

$$G(j\omega) = \xi(\omega) + j\eta(\omega)$$

のように直交座標形式で与えられている時には、ゲイン、位相は

$$\text{ゲイン： } |G(j\omega)| = \sqrt{\xi(\omega)^2 + \eta(\omega)^2}$$

$$\text{位相： } \phi = \angle G(j\omega) = \tan^{-1} \frac{\eta(\omega)}{\xi(\omega)}$$

のようになり、偏角 $\angle G(j\omega)$ は位相に等しいという関係がある．

以上のことをまとめると、ゲイン、位相は

$$\text{ゲイン: } |B/A| = |G(j\omega)| \quad \text{--- (9)}$$

$$\text{位相: } \phi = \angle G(j\omega) \quad \text{--- (10)}$$

である。複素平面上で表せば図4のようになる。

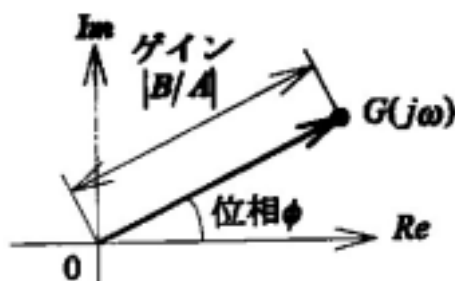


図4 周波数伝達関数

例として、1次遅れ要素のゲインと位相を求めてみる。1次遅れ要素の伝達関数は一般的に次式のように表せる。

$$G(s) = \frac{K}{1+Ts}, \quad T > 0 \quad \text{--- (11)}$$

上式の T は時定数、 K はゲイン定数と呼ばれる。 $s = j\omega$ とすることにより周波数伝達関数が求められる。

$$G(j\omega) = \frac{K}{1+j\omega T} \quad \text{--- (12)}$$

したがって、この要素のゲインと位相はそれぞれ

$$\text{ゲイン: } |G(j\omega)| = \frac{K}{\sqrt{1+(\omega T)^2}} \quad \text{--- (13)}$$

$$\text{位相: } \angle G(j\omega) = -\tan^{-1}(\omega T) \quad \text{--- (14)}$$

となる。

2. 2 周波数応答を用いた伝達関数の同定

ここでは測定した周波数応答データから伝達関数の係数を決定する方法を示す。手順は次のステップからなる。

Step 1 : システムの構造などから伝達関数の次数を決める。

Step 2 : いろいろな角周波数 $\omega_i, i=1, \dots, m$ の正弦波信号を入力し、その定常応答からそれぞれの角周波数におけるゲイン G_i と位相 ϕ_i を測定する。

Step 3 : $G_i, \phi_i, i=1, \dots, m$ から周波数伝達関数の実部 R_i と虚部 I_i を決める。

$$R_i = G_i \cos \phi_i, \quad I_i = G_i \sin \phi_i \quad \text{--- (15)}$$

以下に Step 4 の詳細を示す。

《最小2乗法による伝達関数の係数の決定法》

伝達関数は式(11)で与えられるため、式(12),(15)より次の関係が得られる。

$$\frac{K}{1+j\omega_i T} = R + jI_i, \quad i=1, \dots, m \quad \text{--- (16)}$$

ここで、 ω_i, R_i, I_i は Step 1～3 の手順により既知であり、 T と K が求めたいパラメータである。式(16)を実部と虚部に分解すると次式が得られる。

$$I_i \omega_i T + K - R_i = 0, \quad i=1, \dots, m \quad \text{--- (17)}$$

$$R_i \omega_i T + I_i = 0, \quad i=1, \dots, m \quad \text{--- (18)}$$

式(17)と式(18)は T と K の連立1次方程式であり、行列を用いれば

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{b} \quad \text{--- (19)}$$

と表せる。ただし、

$$A = \begin{bmatrix} I_1 \omega_1 & 1 \\ \vdots & \vdots \\ I_m \omega_m & 1 \\ R_1 \omega_1 & 0 \\ \vdots & \vdots \\ R_m \omega_m & 0 \end{bmatrix} \in \Re^{2m \times 2}, \mathbf{x} = \begin{bmatrix} T \\ K \end{bmatrix} \in \Re^2, \mathbf{b} = \begin{bmatrix} R_1 \\ \vdots \\ R_m \\ -I_1 \\ \vdots \\ -I_m \end{bmatrix} \in \Re^{2m} \quad \text{--- (20)}$$

である。しかし測定データ $R_i, I_i, i=1, \dots, m$ には誤差が含まれるため、上の連立1次方程式を満たす解 $\mathbf{x}$ は一般に存在しない。そこで最小2乗法により $\mathbf{x}$ を決定する。誤差ベクトルを

$$\mathbf{e} = \mathbf{Ax} - \mathbf{b} \quad \text{--- (21)}$$

とおき、 $\mathbf{e} = [e_1, \dots, e_{2m}]^T$ と表す。誤差の2乗和、すなわち

$$\|\mathbf{e}\|^2 = \sum_{i=1}^{2m} e_i^2$$

を最小にする $\mathbf{x}$ を推定値 $\hat{\mathbf{x}}$ とする。 $\hat{\mathbf{x}}$ は次式により与えられる。

$$\hat{\mathbf{x}} = (\mathbf{A}^T \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^T \mathbf{b} \quad \text{--- (22)}$$

2. 3 ボード線図

横軸に角周波数 ω [rad/sec] を対数目盛でとり、縦軸にゲイン $|B/A|$ の対数量 $20\log_{10}|B/A|$ [dB] および位相 ϕ [deg] をとった図をボード線図という。とくにゲイン対角周波数の図をゲイン線図、位相對角周波数の図を位相線図という。

3. 実験手順

2. 2節で述べた同定法を理解するため、パソコンを用いてシステム同定のシミュレーションを行う。その後、電気回路の同定実験を行う。

3. 1 シミュレーション

パソコン上の制御系 CAD には、ある 1 次遅れ要素が設定されている。指定した角周波数 ω_i の正弦波信号を入力し、2. 2節の手順により時定数 T とゲイン定数 K を求める。

3. 2 同定実験

対象にする電気回路は図 5 の CR 回路である。ただし、 $C = 4.7\mu F$, $R = 2.6k\Omega$ である。まずウェーブジェネレータ (CONTEC 社製 LABODOCTOR) を用いて指定した角周波数 ω_i の正弦波信号を入力し、オシロスコープ (同) により、その定常応答を測定する。2. 2節の手順により時定数 T とゲイン定数 K を求める。

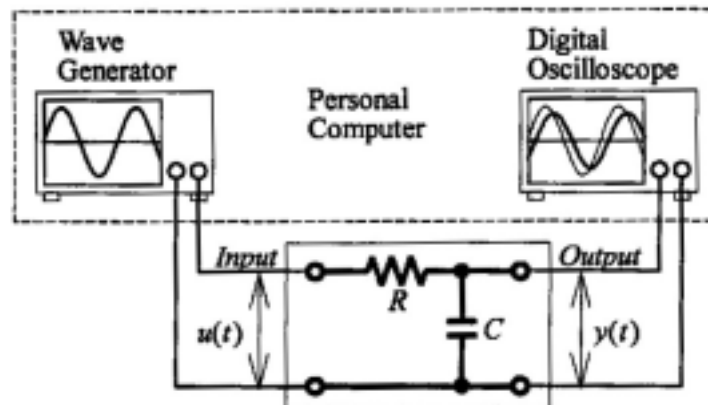


図 5 CR 回路と測定装置の構成

図 5 に示された CR 回路の伝達関数を求める。

回路に流れる電流を $i(t)$ とすると、状態方程式は、

$$\begin{cases} u(t) = R \cdot i(t) + y(t) \\ y(t) = \frac{1}{C} \int_0^t i(\tau) d\tau \quad \Leftrightarrow i(t) = C \cdot \dot{y}(t) \end{cases}$$

$$\Rightarrow u(t) = RC \cdot \dot{y}(t) + y(t)$$

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow U(t) &= L[u(t)] = RC \{sL[y(t)] - y(0)\} + L[y(t)] \\ &= RCs \cdot Y(s) + Y(s) \\ &= (RCs + 1)Y(s) \end{aligned}$$

$$\left(\begin{array}{l} \text{ただし, } L[\dot{y}(t)] = sL[y(t)] - y(0) \quad , \quad L[y(t)] = Y(s) \quad \text{である.} \\ \text{また, } L[\] \text{ はラプラス変換を表す.} \end{array} \right)$$

したがって、この回路の伝達関数は、

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{1}{RCs + 1} \quad \text{--- (23)}$$

4. 測定結果

4. 1 測定結果

(1) シミュレーション

制御系 CAD に設定された、時定数 T およびゲイン定数 K は、

$$\text{真値} \begin{cases} T = 0.01 \\ K = 2 \end{cases} \quad \text{--- (24)}$$

である。

まず、真値のボード線図を描き、一次遅れ要素のボード線図を確認する。この(24)の値から p.5・式(13),(14)より周波数 ω [rad] とゲイン $|B/A|$ および位相 ϕ [deg] のボード線図を描く。このときゲイン線図は $\omega - 20 \log_{10} |B/A|$ 線図である。

p.9・図6に真値のボード線図を、図7に真値の位相線図を示す。

次に、シミュレーションのボード線図を描く。

シミュレーション結果を表1に示す。

表1 シミュレーション結果

	周波数 ω [rad/s]	ゲイン $ B/A $	入力が0を 横切る時刻 t_i [s]	出力が0を 横切る時刻 t_o [s]	時間差 t_d [s] = $t_i - t_o$	位相差 ϕ [rad] = ωt_d
1	30	1.91541	1.15198	1.16131	-0.00933	-0.27990
2	50	1.78882	0.565605	0.574405	-0.008800	-0.440000
3	70	1.63832	0.493715	0.502287	-0.008572	-0.600040
4	80	1.56185	0.431996	0.439996	-0.008000	-0.640000
5	100	1.41425	0.345604	0.353204	-0.007600	-0.760000
6	120	1.28044	0.288002	0.295002	-0.007000	-0.840000

表1より得られた周波数 ω [rad/s]、ゲイン $|B/A|$ 、位相差 ϕ [rad] より式(13),(14)を用いることにより時定数 T およびゲイン定数 K が求まる。また、得られた値は2。2節の手順の最小二乗法によって値を決定する。

今回は実験中に使用したパソコンにあらかじめ、最小二乗法で決定された T と K を計算するプログラムが組まれていたので、それを使用した。その計算結果は次の値である。

$$\text{シミュレーション結果} \begin{cases} T = 0.009527 \\ K = 1.967357 \end{cases} \quad \text{--- (25)}$$

このシミュレーション結果の値と各周波数でのシミュレーション値をボード線図で示したもの、および(24)の真値とあわせたもののゲイン線図を p.10・図8に、位相線図を p.12・図9にそれぞれ描く。

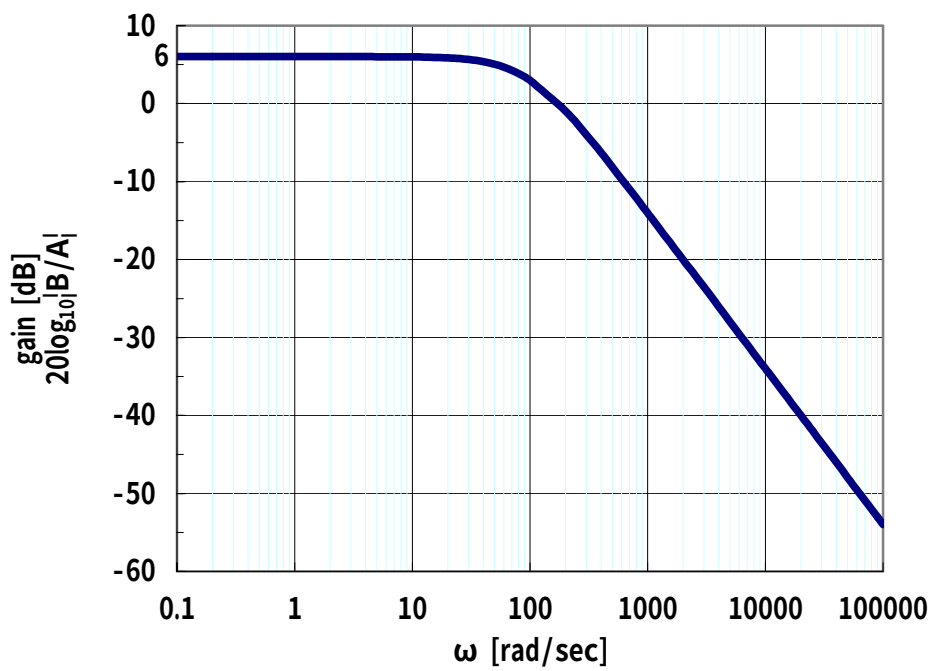


図6 ゲイン線図 (真値)

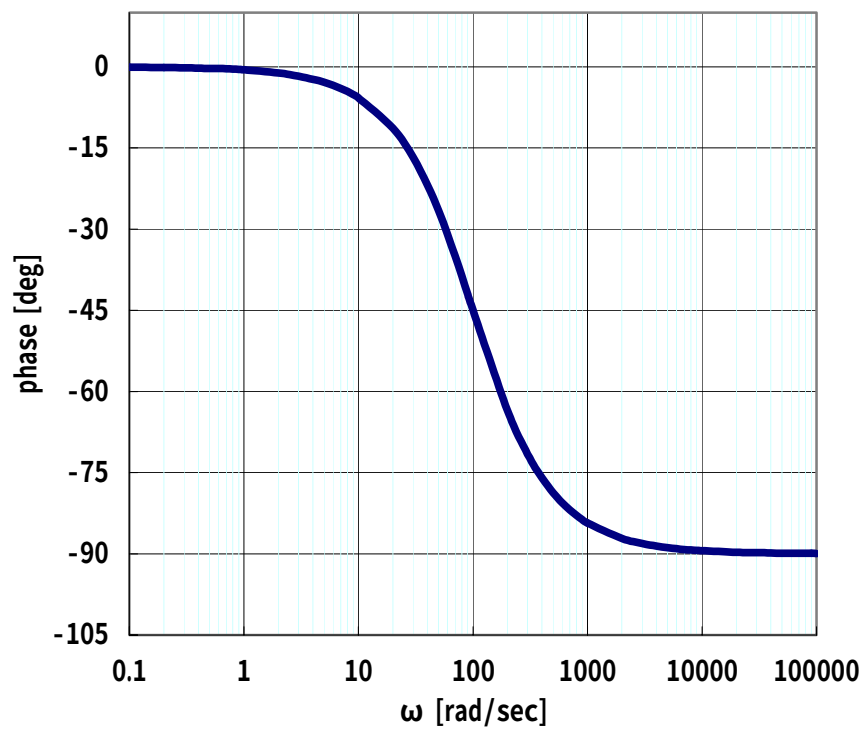
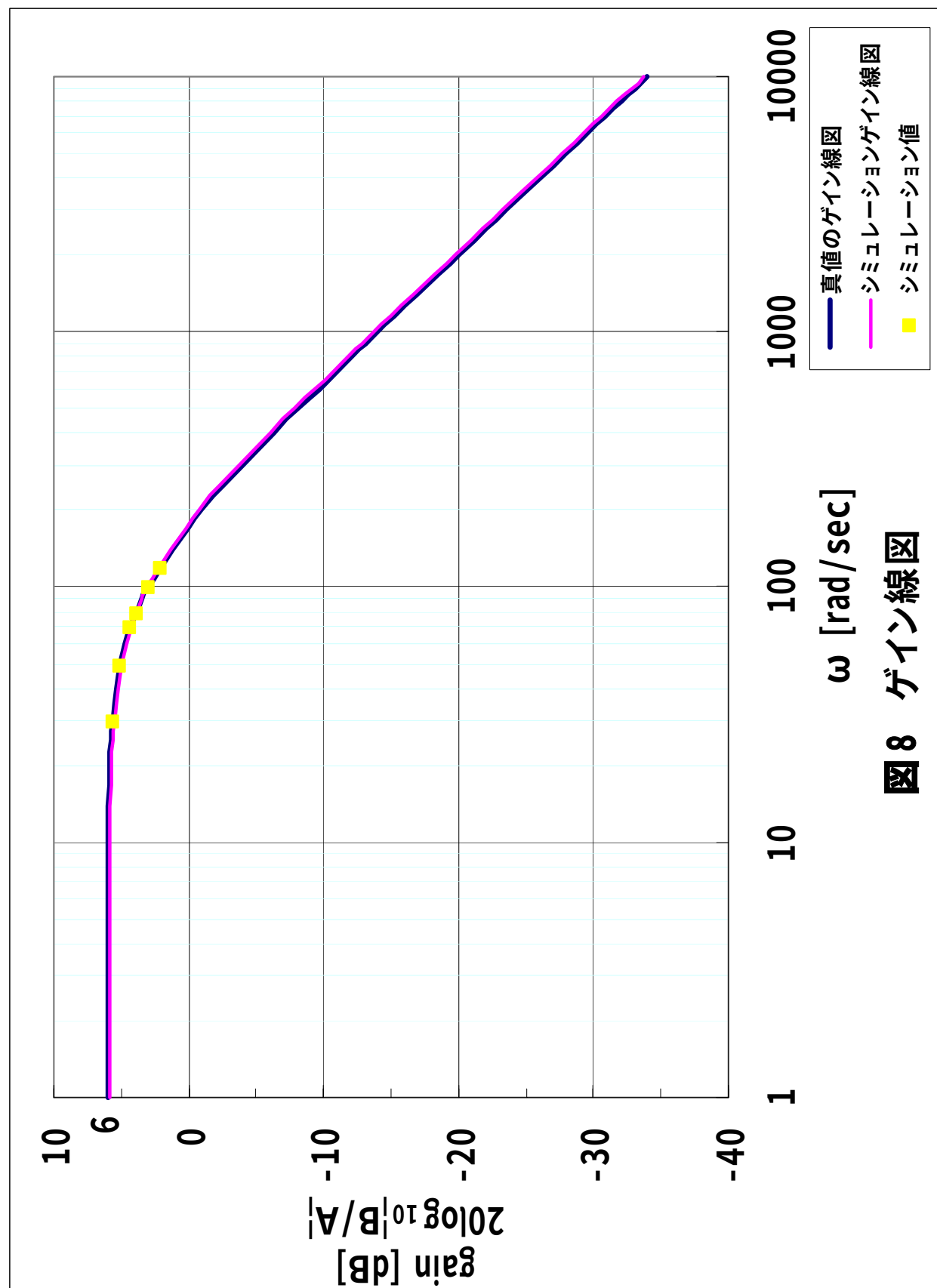
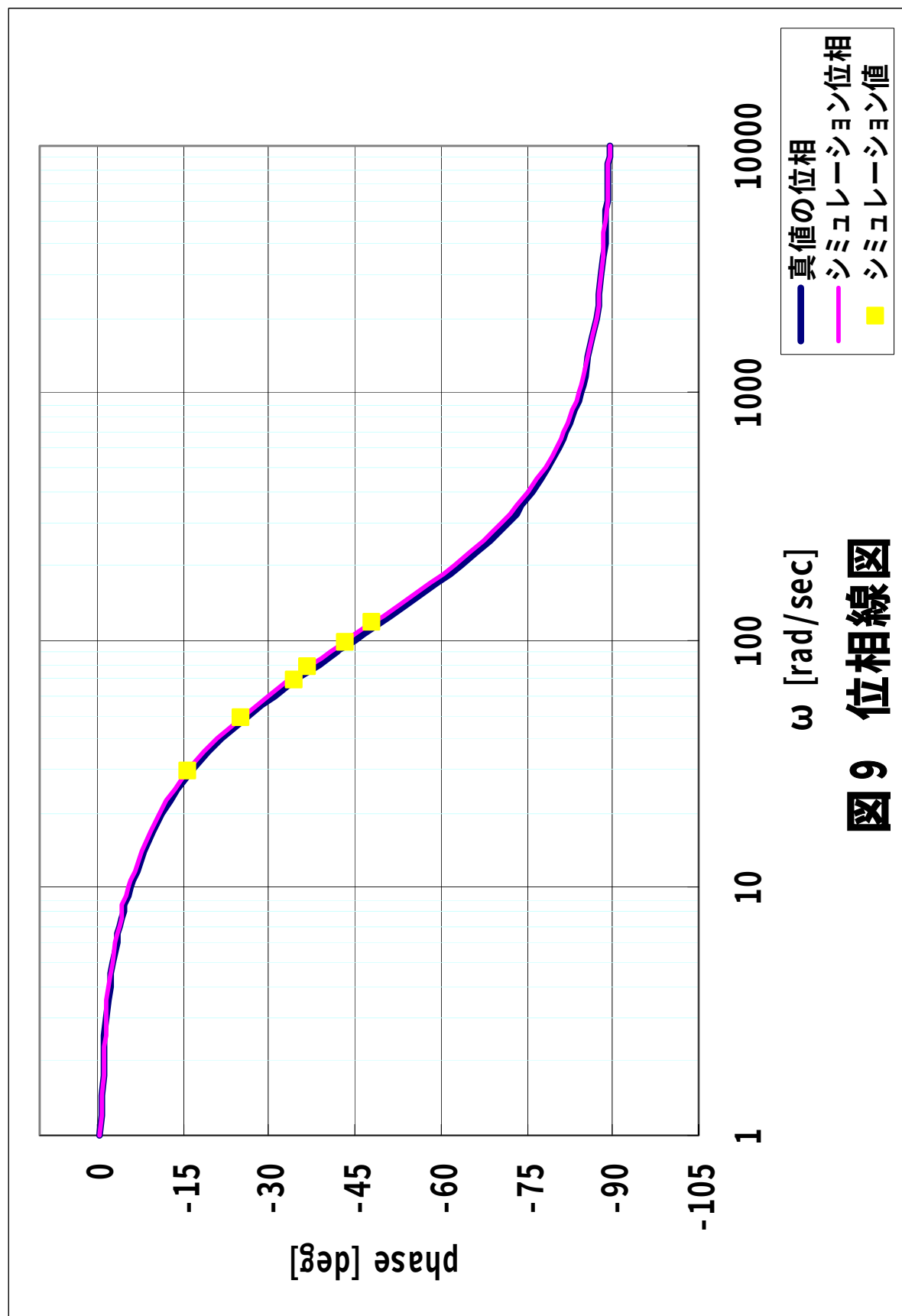


図7 位相線図 (真値)





(2) 実験

図 5 (p.7) の電気回路の伝達関数は p.7・式(23)にもあるように,

$$(23) \Leftrightarrow G(s) = \frac{1}{RCs + 1}$$

また, 1 次遅れ要素の伝達関数の一般式は, p.5・式(11)より,

$$(11) \Leftrightarrow G(s) = \frac{K}{1 + Ts}$$

であるので, 式(11)と(24)を比較することによりこの電気回路の次定数 T およびゲイン定数 K の真値はそれぞれ次の値である.

$$\text{真値} \begin{cases} T = RC = 2.6 \times 10^3 \times 4.7 \times 10^{-6} = 0.0122 \\ K = 1 \end{cases} \quad \text{--- (26)}$$

シミュレーションと同様に, まず真値のボード線図を描き, 一次遅れ要素のボード線図を確認する.

この実験電気回路の真値のゲイン線図を図 11 (p.13) に, 位相線図を図 12 (同) に示す.

続いて, 電気回路の実験における測定値のボード線図を描く.
実験での測定値を表 2 に示す.

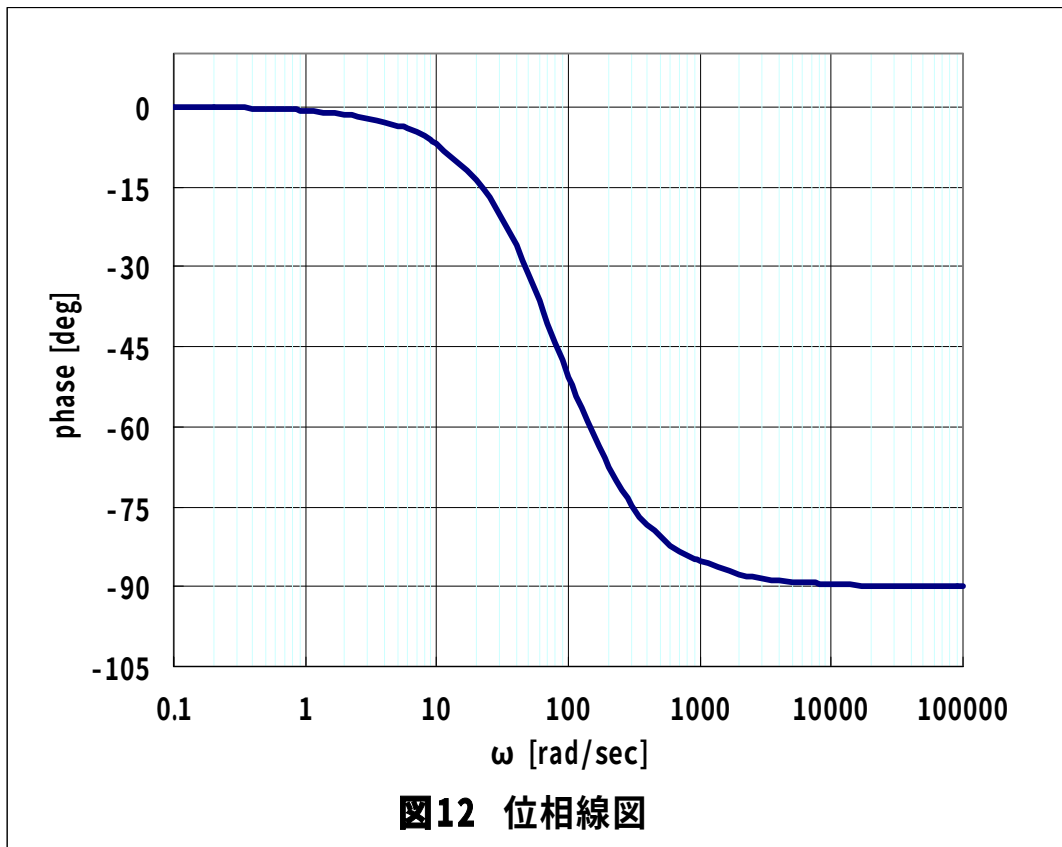
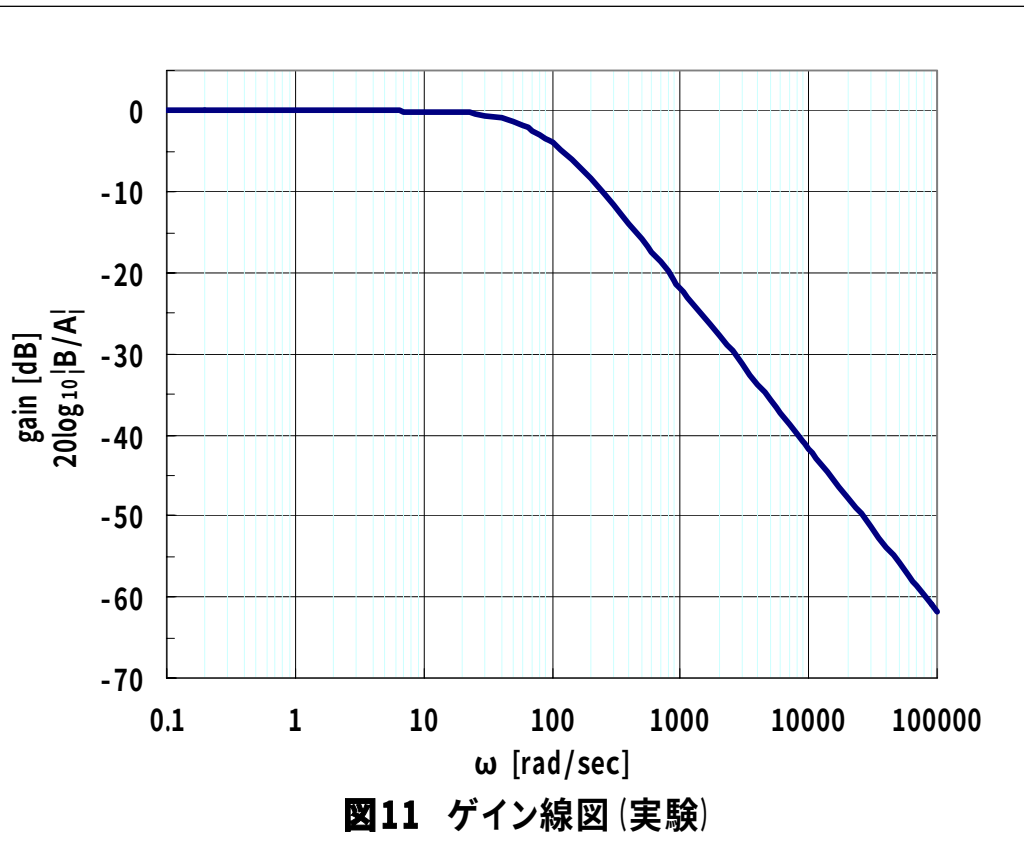
表2 実験測定値

	周波数 ω [rad/s]	ゲイン $ B/A $	位相差 ϕ [rad]
1	18.8	0.971	-0.233
2	31.2	0.928	-0.336
3	43.7	0.887	-0.473
4	56.2	0.806	-0.563
5	74.8	0.747	-0.692
6	93.6	0.661	-0.794
7	113	0.605	-0.905
8	138	0.524	-1.04

この測定より求まった, 時定数 T およびゲイン定数 K のそれぞれの値を最小二乗法で求めた値は, 次の通りである.

$$\text{実験値} \begin{cases} T = 0.0116 \\ K = 0.984 \end{cases} \quad \text{--- (27)}$$

この実験結果の値と各周波数での実験測定値をボード線図で示したもの, および(26)の真値とあわせたもののゲイン線図を p.14・図 13 に, 位相線図を p.15・図 14 にそれぞれ描く.



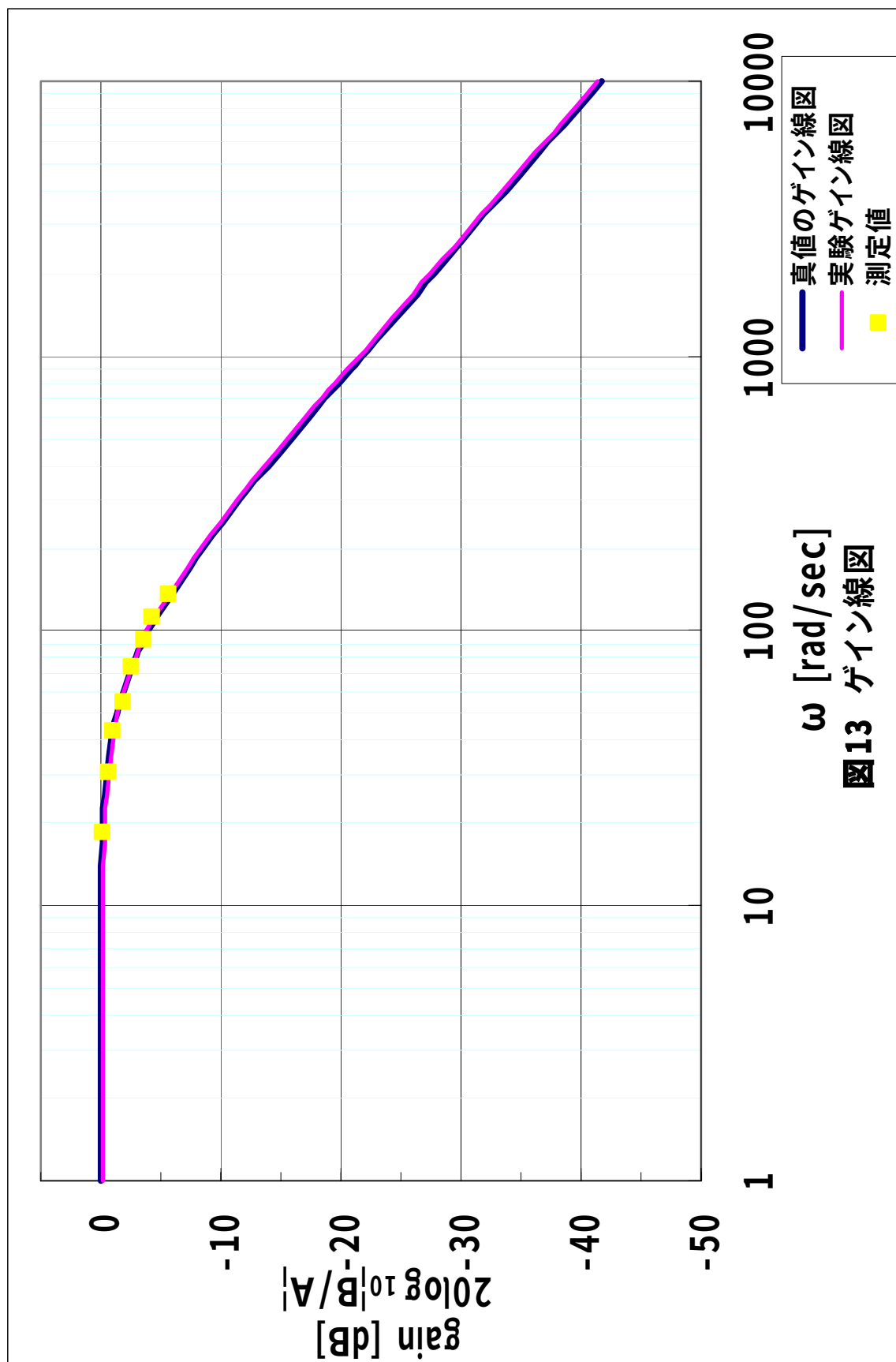


図13 ゲイン線図

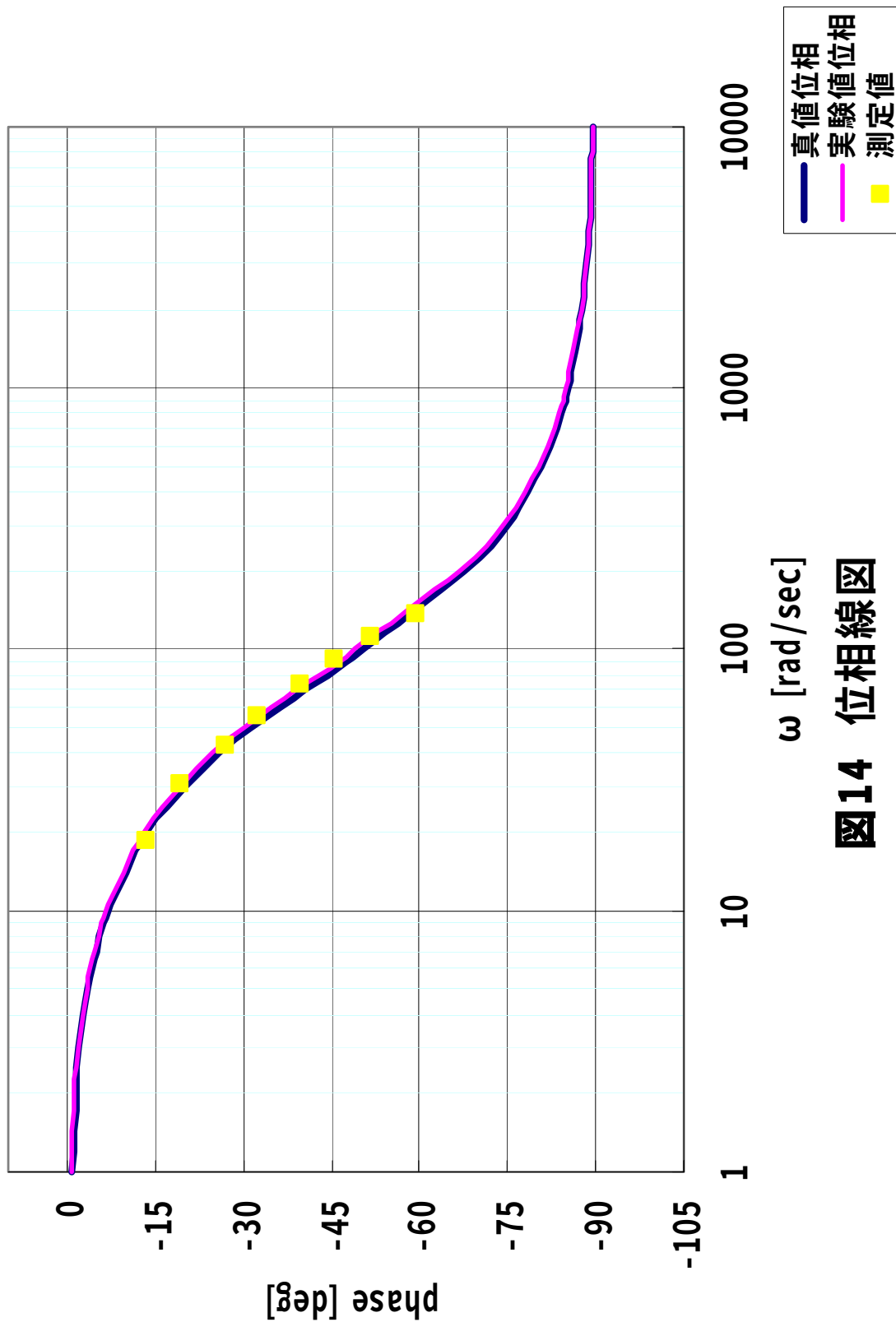


図14 位相線図

4. 2 考察

(1) シミュレーション

ゲインについては、p.9・図6またはp.10・図8のゲイン線図を見ても分かるように、周波数： ω [rad/s]が増大するにつれて、ゲイン： $20\log_{10}|B/A|$ [dB]の値は減少している。一方、 ω の値が0近傍にあるときでは、ゲインは6に収束している。

また位相については、p.9・図7またはp.11・図9の位相線図を見ると、 $\omega \rightarrow 0$ [rad/s]で位相： $\phi \rightarrow 0$ [deg]、 $\omega \rightarrow \infty$ [rad/s]で $\phi \rightarrow -90$ [deg] $=-\pi/2$ [rad]に収束している。

これらを確かめるため、式(13),(14)にシミュレーション真値(24)を代入してみると、

$$\lim_{\omega \rightarrow +0} \left(20\log_{10} \left| \frac{B}{A} \right| \right) = \lim_{\omega \rightarrow +0} \left(20\log_{10} \frac{2}{\sqrt{1+(0.01\omega)^2}} \right) = 20\log_{10} 2 = 6.02 \cdots \text{ [dB]}$$

$$\lim_{\omega \rightarrow \infty} \left(20\log_{10} \left| \frac{B}{A} \right| \right) = \lim_{\omega \rightarrow \infty} \left(20\log_{10} \frac{2}{\sqrt{1+(0.01\omega)^2}} \right) = 20\log_{10} 0 = -\infty \text{ [dB]}$$

$$\lim_{\omega \rightarrow +0} \phi = \lim_{\omega \rightarrow +0} \left[-\tan^{-1}(0.01\omega) \right] = -\tan^{-1}0 = 0 \text{ [deg]}$$

$$\lim_{\omega \rightarrow \infty} \phi = \lim_{\omega \rightarrow \infty} \left[-\tan^{-1}(0.01\omega) \right] = -\tan^{-1}\infty = -\frac{\pi}{2} = -90 \text{ [deg]}$$

となることが確認できる。

一方、シミュレーション値と真値を比較しても、図8,図9を見る限りグラフは重なっている。ただし、図9の位相線図で $10 \leq \omega \leq 1000$ [rad/s]において、真値がシミュレーション値をやや下回っているように見受けられる。むしろ、位相の極値はシミュレーション値も真値も同じであるため ω の値を $\omega \rightarrow +0$ [rad/s]または $\omega \rightarrow \infty$ [rad/s]とすれば自ずと差も小さくなるため、図9の $10 \leq \omega \leq 1000$ [rad/s]の範囲で差が大きくなるのは当然の話である。

各測定値についてもグラフ上にプロットされているように見て取れるが、それぞれの測定誤差については、4. 3節で述べることにする。

(2) 実験

(1)と同様に、まずゲイン： $20\log_{10}|B/A|$ と位相： ϕ の極限值を求めると、

$$\lim_{\omega \rightarrow +0} \left(20\log_{10} \left| \frac{B}{A} \right| \right) = \lim_{\omega \rightarrow +0} \left(20\log_{10} \frac{1}{\sqrt{1+(0.0122\omega)^2}} \right) = 20\log_{10} 1 = 0 \text{ [dB]}$$

$$\lim_{\omega \rightarrow \infty} \left(20\log_{10} \left| \frac{B}{A} \right| \right) = \lim_{\omega \rightarrow \infty} \left(20\log_{10} \frac{1}{\sqrt{1+(0.0122\omega)^2}} \right) = 20\log_{10} 0 = -\infty \text{ [dB]}$$

$$\lim_{\omega \rightarrow +0} \phi = \lim_{\omega \rightarrow +0} \left[-\tan^{-1}(0.0122\omega) \right] = -\tan^{-1}0 = 0 \text{ [deg]}$$

$$\lim_{\omega \rightarrow \infty} \phi = \lim_{\omega \rightarrow \infty} \left[-\tan^{-1}(0.0122\omega) \right] = -\tan^{-1}\infty = -\frac{\pi}{2} = -90 \text{ [deg]}$$

である。これらの値とグラフ p.13～15・図11,図12,図13および図14とを見比べると、確かに極値とグラフの端点とが一致する。

また、真値と実験値のグラフを比較しても、完全に重なっているように見て取れる

(1)同様、測定誤差については次の4. 3節で述べることにする。

4. 3 検討

(1) シミュレーションの誤差

コンピュータを用いたシミュレーションでは、シミュレートした値の一部分のみを取り出して、それを測定値とする。そのため、取り出す値の数、つまりは刻み幅の大小に測定誤差が大きく影響されることになる。

今回のシミュレーションでの刻み幅は、 $\Delta t_d = \frac{0.04}{\omega}$ である。

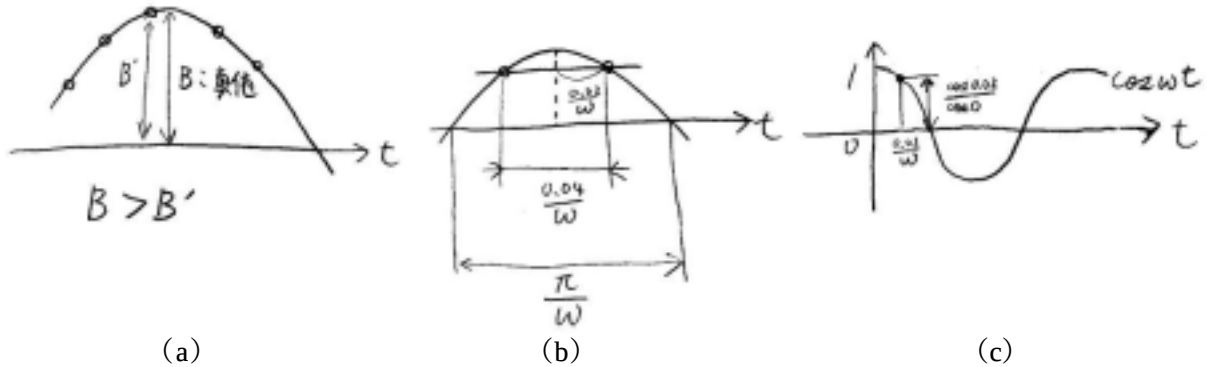


図 15 ゲイン誤差

図 15(a)に示すように、振幅に関しては真値 B に対して測定値 B' は、 $B \geq B'$ となる。 B と B' との差の最大値は(b)に示すように正弦波の極大値に対して測定点が対称になった時である。

さて、(c)のような $y = \cos \omega t$ のグラフを考える。 $t = \Delta t_d / 2$ を代入すると、

$$y = \cos\left(\omega \cdot \frac{0.02}{\omega}\right) = \cos 0.02$$

である。このときの $y(t)$ と振幅の比は、

$$\frac{\cos 0 - \cos 0.02}{\cos 0} = \frac{1 - 0.999800 \dots}{1} = 0.0002 \dots \approx 0.02 [\%]$$

したがって、振幅 B の測定値 B' は

$$B' = 0.9998B$$

また、今回は入力側の振幅は $A=1$ で決められているので、ゲインの誤差は

$$\left| \frac{B'}{A} \right| = (1 - 0.0002) \left| \frac{B}{A} \right| \quad \text{--- (28)}$$

一方、位相の誤差は、ゲイン同様に図 16 で示したシミュレーションの刻み幅によって生じる。

位相は、 $\phi = \omega \cdot t_d$ で求まる。

したがって、図より位相誤差 ϕ' は、

$$\phi' = \omega \cdot t'_d = \omega(t_d \pm \Delta t_d) = \phi \pm 0.04 \quad [\text{rad}] \quad \text{--- (29)}$$

である。

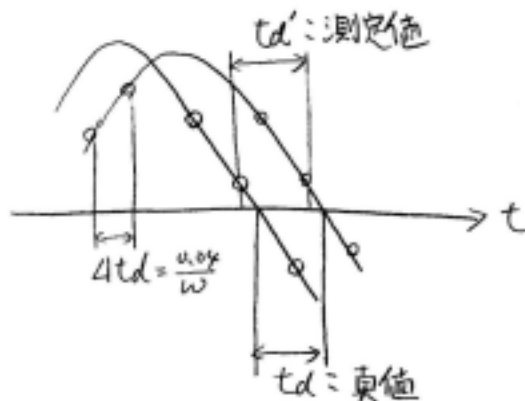


図 16 位相誤差

これら，式(28),(29)で得られた誤差の範囲を表 3，表 4 にまとめる．

表 3 ゲイン誤差範囲

	周波数 ω [rad/s]	ゲイン $ B/A $			
		真値	シミュレーション		真値－測定値
			測定値	誤差範囲	
1	30	1.91565	1.91541	0.00038	0.00024
2	50	1.78885	1.78882	0.00036	0.00003
3	70	1.63846	1.63832	0.00033	0.00014
4	80	1.56174	1.56185	0.00031	-0.00011
5	100	1.41421	1.41425	0.00028	-0.00004
6	120	1.28037	1.28044	0.00026	-0.00007

表 4 位相誤差範囲

	周波数 ω [rad/s]	位相差 ϕ [deg]			
		真値	シミュレーション		真値－測定値
			測定値	誤差範囲	
1	30	-16.6992	-16.0371	2.29183	-0.6622
2	50	-26.5651	-25.2101	2.29183	-1.3549
3	70	-34.9920	-34.3798	2.29183	-0.6123
4	80	-38.6598	-36.6693	2.29183	-1.9905
5	100	-45.0000	-43.5448	2.29183	-1.4552
6	120	-50.1944	-48.1285	2.29183	-2.0660

表 4 で，位相の値はすべて誤差の範囲内に収まっているが，表 3 のゲインについては $\omega = 80, 100, 120$ の値は $B < B'$ となっている．

ゲインで予想誤差よりも誤差が大きくなった理由として考えられることは，まず一つとして測定時間が整定時間（最終値の $\pm 5\%$ 以内の収まるまでの時間）以前であった可能性がある．この実験は前提条件として，無限時間後の測定値を求めなければならないので，そこで誤差が生じた可能性はある．

もう一つ考えられるのは，コンピュータの機器誤差である．コンピュータは計算を行う際，ニュートン法などの近似計算によって数値計算を行う．したがって，近似解に誤差を含んでしまう．今回用いたコンピュータの機器誤差がどの程度かは分からないが，近年のコンピュータにおいてそれほど大きな誤差を生じるとは考えづらいので，この可能性は薄い．

(2) 実験の誤差

この実験で考えられる誤差要因は、電気回路のコンデンサや抵抗の機器誤差、定規等を用いた計測の際に生じた個人誤差や定規の機器誤差である。

通常考えられる、コンデンサや抵抗の機器誤差は±5%程度である。(1)同様に実際に比較したものを表5に示す。

表5 実験誤差

	周波数 ω [rad/s]	ゲイン B/A			位相差 ϕ [deg]		
		真値	測定値	誤差 [%]	真値	測定値	誤差 [%]
1	18.8	0.975	0.971	0.380	-12.9	-13.3	-3.24
2	31.2	0.935	0.928	0.710	-20.8	-19.3	8.25
3	43.7	0.882	0.887	-0.516	-28.1	-27.1	3.55
4	56.2	0.825	0.806	2.33	-34.4	-32.3	6.75
5	74.8	0.739	0.747	-1.12	-42.4	-39.6	6.89
6	93.6	0.659	0.661	-0.331	-48.8	-45.5	7.25
7	113	0.587	0.605	-2.95	-54.0	-51.9	4.23
8	138	0.511	0.524	-2.54	-59.3	-59.6	-0.498

ゲインはすべて3%以内の誤差であるが、位相の誤差は3～8%であり、コンデンサと抵抗の機器誤差を越えて誤差が出ている。

表5で行った誤差の算出には、計測誤差が含まれていない。計測方法が定規を用いた計測であったことを考えると、十分に誤差が生じることが考えられる。

(3) 複数回の測定を行う理由

今回の測定では、シミュレーションでは6回の測定、実験では8回の測定を行った。原理的には、時定数Tおよびゲイン定数Kの両方が一度の測定で算出できるため、一度の測定で十分のような気がするが、そうではない。

例えば、ある測定を複数回行ったとする。各測定値 x_i の平均値 $\bar{x}$ はどのような誤差を持つのであろうか。n組の測定によって得られたn個の平均値を考えると、やはり誤差を含んで真の値のまわりに分布している。しかし平均値は各測定値よりも真の値に近くなっていることを考えると、平均値は各測定値より狭い範囲に分布することが容易に想像できる。実際に平均値のもつ平均誤差 s_n は、

$$s_n = \sqrt{\frac{1}{n(n-1)} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2} = \frac{1}{\sqrt{n}} s \quad \text{--- (30)}$$

となることが知られている。例えば5回測定の平均分布を考えると、p.20・図17⁴⁾に示すように、平均値の誤差分布の変曲点 s_n は $s/\sqrt{5}$ となり、各誤差曲線に比べ鋭くなる。式(30)からも分かるとおり、平均値の平均誤差 s_n は s に対して $1/\sqrt{n}$ の割合で減少していく。その様子を図18⁴⁾に示す。図18を見てもわかるとおり、測定値の平均誤差 s に対して平均値の平均誤差 s_n は最初の回数の測定によって急速に減少し、約10回以上の測定回数では減り方が緩やかになる。このように、平均値の平均誤差 s_n は式(30)で求めることができ、測定は10回程度行うことが効果的であることがわかる。

むろん、10回と言うのはあくまでも目安であって、今回の実験のように6～8回でも十分効果的な測定であったのではないかと考えられる。

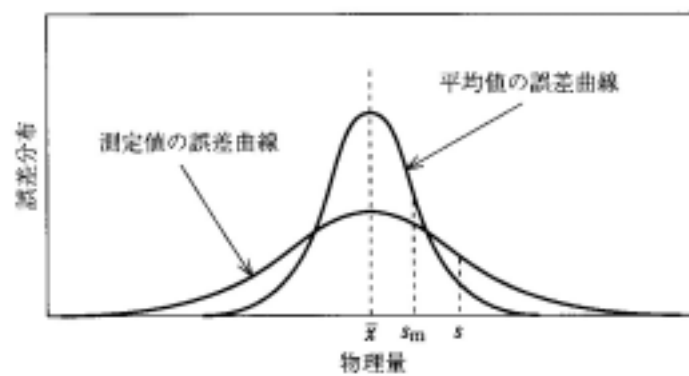


図 17 測定値と平均値の誤差分布の比較 ⁴⁾

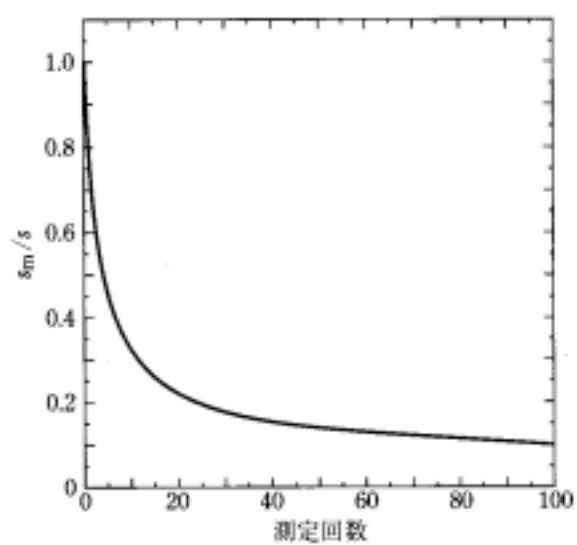


図 18 平均値の平均誤差の測定回数依存性 ⁴⁾

5. 課題

(1) 出力式の導出

伝達関数が式(11)で表される 1 次遅れ要素の場合に、式(1)の正弦波を入力した時の応答の式を求める。

まず、応答の式： $y(t)$ をラプラス変換した式： $Y(s)$ は、 入力の式をラプラス変換した式と伝達関数の積で表すことができる。

$$Y(s) = U(s) \cdot G(s)$$

式(1)より、 $u(t)$ は、

$$u(t) = A \sin \omega t$$

この式をラプラス変換すると、

$$\begin{aligned} U(s) = L[u(t)] &= A \int_0^{\infty} \sin \omega t \cdot e^{-st} dt \\ &= A \int_0^{\infty} \frac{e^{j\omega t} - e^{-j\omega t}}{2j} \cdot e^{-st} dt \\ &= \frac{A}{2j} \left[\int_0^{\infty} e^{-(s-j\omega)t} dt - \int_0^{\infty} e^{-(s+j\omega)t} dt \right] \\ &= \frac{A}{2j} \left[\frac{1}{s-j\omega} - \frac{1}{s+j\omega} \right] \\ &= \frac{A}{2j} \left[\frac{s+j\omega}{(s-j\omega)(s+j\omega)} - \frac{s-j\omega}{(s+j\omega)(s-j\omega)} \right] \\ &= A \cdot \frac{\omega}{s^2 + \omega^2} \end{aligned}$$

また、 $G(s)$ は式(11)より

$$G(s) = \frac{K}{1+Ts}$$

したがって、 $Y(s)$ は、

$$Y(s) = A \cdot \frac{\omega}{s^2 + \omega^2} \cdot \frac{K}{1+Ts}$$

ところで、 $Y(s)$ の式は次のように部分分数展開して書き換えることができる。

$$Y(s) = AK\omega \left[\frac{c_1}{1+Ts} + \frac{c_2}{s+j\omega} + \frac{c_3}{s-j\omega} \right]$$

このときの係数 c_1, c_2, c_3 は、

$$c_1 = \left[(1+Ts) \frac{1}{(1+Ts)(s^2 + \omega^2)} \right]_{s=-\frac{1}{T}} = \frac{1}{1/T^2 + \omega^2} = \frac{T^2}{1+(T\omega)^2}$$

$$\begin{aligned}
c_2 &= \left[(s+j\omega) \frac{1}{(1+Ts)(s+j\omega)(s-j\omega)} \right]_{s=-j\omega} \\
&= \frac{1}{(1-j\omega T)(-2j\omega)} \\
&= -\frac{1}{2\omega} \cdot \frac{1}{T\omega+j} \\
&= -\frac{1}{2\omega} \cdot \frac{T\omega-j}{1+(T\omega)^2} \\
c_3 &= \overline{c_2} = -\frac{1}{2\omega} \cdot \frac{T\omega+j}{1+(T\omega)^2}
\end{aligned}$$

よって,

$$\begin{aligned}
y(t) &= \frac{AK\omega T}{1+(\omega T)^2} \cdot L^{-1} \left[\frac{1}{s+1/T} \right] - \frac{1}{2\omega} \cdot \frac{AK\omega}{1+(T\omega)^2} L^{-1} \left[\frac{\omega T-j}{s+j\omega} + \frac{\omega T+j}{s-j\omega} \right] \\
&= \frac{AK\omega T}{1+(\omega T)^2} \cdot e^{-\frac{t}{T}} - \frac{1}{2} \cdot \frac{AK}{1+(T\omega)^2} \left[(\omega T-j)e^{-j\omega t} + (\omega T+j)e^{j\omega t} \right] \\
&= \frac{AK\omega T}{1+(\omega T)^2} \cdot e^{-\frac{t}{T}} - \frac{1}{2} \cdot \frac{AK}{1+(T\omega)^2} \left[(\omega T-j)(\cos \omega t - j \sin \omega t) + (\omega T+j)(\cos \omega t + j \sin \omega t) \right] \\
&= \frac{AK\omega T}{1+(\omega T)^2} \cdot e^{-\frac{t}{T}} - \frac{1}{2} \cdot \frac{AK}{1+(T\omega)^2} [2\omega T \cos \omega t - 2 \sin \omega t] \\
&= \frac{AK\omega T}{1+(\omega T)^2} \cdot e^{-\frac{t}{T}} + \frac{AK}{1+(T\omega)^2} (\sin \omega t - \omega T \cos \omega t) \\
&= \frac{AK\omega T}{1+(\omega T)^2} \cdot e^{-\frac{t}{T}} + \frac{AK}{1+(T\omega)^2} \sqrt{1^2 + (\omega T)^2} \cdot \sin(\omega t + \phi) \\
&= \frac{AK\omega T}{1+(\omega T)^2} \cdot e^{-\frac{t}{T}} + \frac{AK}{\sqrt{1+(T\omega)^2}} \sin(\omega t + \phi)
\end{aligned}$$

ただし,

$$\begin{aligned}
\cos \phi &= \frac{1}{\sqrt{1+(\omega T)^2}}, \quad \sin \phi = -\frac{\omega T}{\sqrt{1+(\omega T)^2}} \\
&\Leftrightarrow \phi = -\tan^{-1}(\omega T)
\end{aligned}$$

以上より, 伝達関数が式(11)で表される 1 次遅れ要素の場合, 式(1)の正弦波を入力した時の応答は,

$$y(t) = \frac{AK\omega T}{1+(\omega T)^2} \cdot e^{-\frac{t}{T}} + \frac{AK}{\sqrt{1+(T\omega)^2}} \sin(\omega t + \phi) \quad \text{--- (5.1)}$$

$$\phi = -\tan^{-1}(\omega T) \quad \text{--- (5.2)}$$

である.

さらに, $t \rightarrow \infty$ においては,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{AK\omega T}{1 + (\omega T)^2} \cdot e^{-\frac{t}{T}} = 0, \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{AK}{\sqrt{1 + (T\omega)^2}} \sin(\omega t + \phi) \neq 0$$

である. 後者の式は $t \rightarrow \infty$ において正弦波振動を起こす.

したがって, $t \rightarrow \infty$ でのゲインと位相は,

$$\text{ゲイン: } \left| \frac{AK}{\sqrt{1 + (T\omega)^2}} \sin(\omega t + \phi) \right| = \frac{AK}{\sqrt{1 + (T\omega)^2}}$$

$$\text{位相: } \phi = -\tan^{-1}(\omega T)$$

であり, この2式は式(13),(14)と一致する.

(2) CLR 回路の伝達関数

次の図 5.1 で示されたシステムの伝達関数を求める.

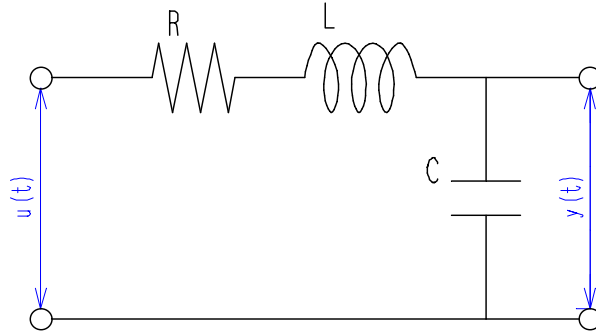


図 5.1 課題・CLR 回路

まず, この回路の状態方程式を求める.

この回路に流れる電流を $i(t)$ とすると, 状態方程式は,

$$\begin{cases} u(t) = R \cdot i(t) + L \cdot \dot{i}(t) + y(t) \\ y(t) = \frac{1}{C} \int_0^t i(\tau) d\tau \end{cases} \quad (5.3)$$

ここで, $u(t), y(t), i(t)$ をそれぞれラプラス変換した式を,

$$L[u(t)] = U(s), \quad L[y(t)] = Y(s), \quad L[i(t)] = I(s)$$

とすると, 式(5.3)の状態方程式をラプラス変換した式は,

$$(5.3) \Leftrightarrow \begin{cases} U(s) = R \cdot I(s) + L\{sI(s) - i(0)\} + Y(s) \\ Y(s) = \frac{1}{Cs} I(s) \end{cases}$$

ここで, $i(0) = 0$ なので,

$$\Leftrightarrow \begin{cases} U(s) = (R + Ls) \cdot I(s) + Y(s) \\ I(s) = Cs \cdot Y(s) \end{cases}$$

この2式より, $I(s)$ を消去すると,

$$\Rightarrow U(s) = Y(s) \cdot \{(R + Ls)Cs\}$$

よって, 求める伝達関数は

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{1}{Cs(R + Ls)} \quad \text{--- (5.4)}$$

である.

(3) 2次要素のゲイン・位相・ボード線図

2次要素の伝達関数が,

$$G(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} \quad \text{--- (5.5)}$$

で与えられている時の, ゲイン: $|G(j\omega)|$ と位相: $\angle G(j\omega)$ を求める.

式(5.5)の伝達関数に $G=j\omega$ を代入すると,

$$\begin{aligned} G(j\omega) &= \frac{\omega_n^2}{(j\omega)^2 + 2j\zeta\omega\omega_n + \omega_n^2} \\ &= \frac{1}{-(\omega/\omega_n)^2 + 2j\zeta \cdot \omega/\omega_n + 1} \\ &= \frac{1}{[1 - (\omega/\omega_n)^2]^2 + (2\zeta \cdot \omega/\omega_n)^2} \left[1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2 - 2j\zeta \cdot \frac{\omega}{\omega_n} \right] \end{aligned}$$

ここで, $\frac{\omega}{\omega_n} = \Omega$ とすると,

$$G(j\omega) = \frac{1}{(1 - \Omega^2)^2 + (2\zeta \cdot \Omega)^2} (1 - \Omega^2 - 2j\zeta \cdot \Omega)$$

したがって,

$$\begin{aligned} \text{ゲイン: } |G(j\omega)| &= \frac{1}{(1 - \Omega^2)^2 + (2\zeta \cdot \Omega)^2} \sqrt{(1 - \Omega^2)^2 + (2\zeta \cdot \Omega)^2} \\ &= \frac{1}{(1 - \Omega^2)^2 + (2\zeta \cdot \Omega)^2} \quad \text{--- (5.6)} \end{aligned}$$

$$\text{位相: } \angle G(j\omega) = \arg G(j\omega) = \tan^{-1} \left(\frac{-2\zeta \cdot \Omega}{1 - \Omega^2} \right) = -\tan^{-1} \left(\frac{2\zeta \cdot \Omega}{1 - \Omega^2} \right) \quad \text{--- (5.7)}$$

ただし, $\Omega = \frac{\omega}{\omega_n}$

式(5.5)のゲインの式と，式(5.6)の位相の式をそれぞれボード線図に表す．定数 ζ の値ごとにゲイン線図と位相線図を示したものを，それぞれ図 5.2，図 5.3 に示す．

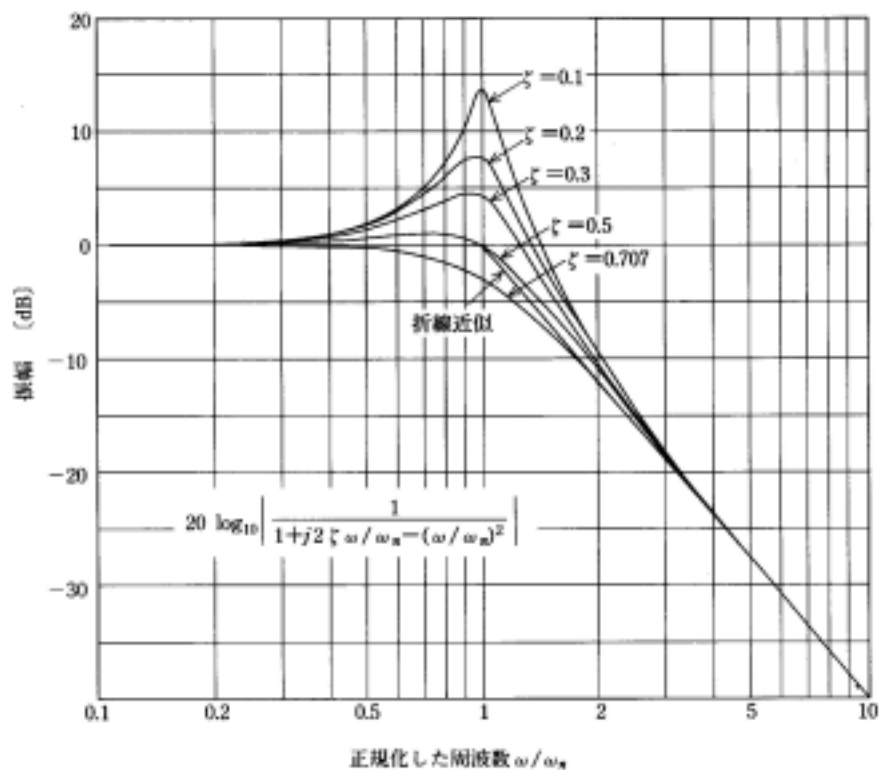


図 5.2 2次要素・ゲイン線図

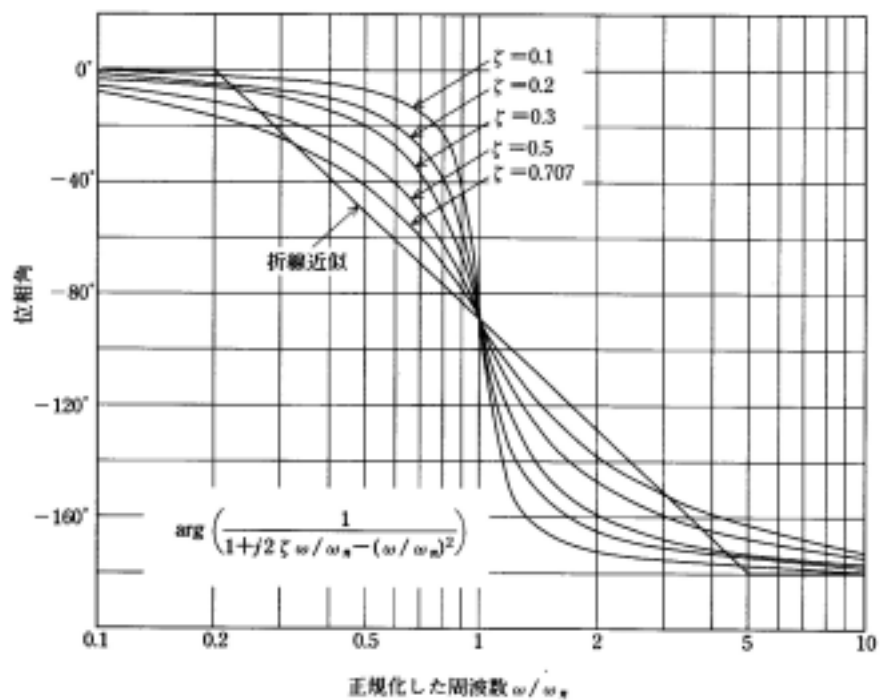


図 5.3 2次要素・位相線図

ボード線図のゲインと位相の式は次の2式である.

$$\left\{ g_{dB} = 20 \log_{10} \frac{1}{\sqrt{(1-\Omega^2)^2 + (2\zeta \cdot \Omega)^2}} = -10 \log_{10} \{ \Omega^4 + 2(2\zeta^2 - 1)\Omega^2 + 1 \} \right. \quad \text{---(5.8)}$$

$$\left. \phi = -\tan^{-1} \left(\frac{2\zeta \cdot \Omega}{1-\Omega^2} \right) \right\} \quad \text{---(5.7)}$$

ここで, ゲイン: g_{dB} [dB]と位相: ϕ [deg]は減衰率 ζ によって変化する.

さて, Ω の大小によって g_{dB} がどのように近似できるかについて考えてみる. Ω が非常に小さいときには, 式(5.8)において, $\Omega^4 + 2(2\zeta^2 - 1)\Omega^2 + 1 \approx 1$ とみなせるので,

$$g_{dB} \approx -10 \log 1 = 0$$

である.

Ω が非常に大きい時には, 式(5.8)において, $\Omega^4 + 2(2\zeta^2 - 1)\Omega^2 + 1 \approx \Omega^4$ とみなせるので,

$$g_{dB} \approx -10 \log \Omega^4 = -40 \log \Omega$$

したがって, Ω が小さいときには g_{dB} は0[dB]に, 大きいときには -40 [dB/dec]の傾きを持つ直線に漸近する. この二つの漸近線の交点は $\Omega=1$ である. 1次要素線図の時には, この二つの漸近線を滑らかに結ぶ曲線がゲイン線図の式となったが, 2次要素では1次系とは違い, 減衰率 ζ が小さい場合, g_{dB} は Ω の増加に伴って一様に減少するのではなく, $\Omega=1$ の近傍で g_{dB} は極値を持ち, 近似直線とはかけ離れた値となる.

では, ζ がどのような値の時に g_{dB} は極値を持つのであろうか?

g_{dB} が極大値を持つときには $dg_{dB}/d\Omega = 0$ が成り立つので, 式(5.8)を Ω で微分して0とおくことにより,

$$\Omega^2 = 1 - 2\zeta^2$$

を得る. したがって, g_{dB} に極大値を与える Ω の値 Ω_m は,

$$\Omega = \Omega_m = \sqrt{1 - 2\zeta^2} \quad \text{---(5.9)}$$

ここで, Ω_m は正の実数であるから

$$1 - 2\zeta^2 > 0$$

すなわち,

$$0 < \zeta < \frac{1}{\sqrt{2}}$$

でなければならず, 減衰率 ζ は $1/\sqrt{2} \approx 0.707$ より小さくなる必要がある. 式(5.9)を式(5.8)へ代入して g_{dB} の極大値 g_{dBm} を求めると,

$$g_{dBm} = -10 \log_{10} \{ 4\zeta^2 (1 - \zeta^2) \}$$

となる.

例えば, 図 5.2 のゲイン線図において,

$$\zeta = 0.5 \text{ のとき, } (\Omega_m, g_{dBm}) = (0.707, 1.25)$$

$$\zeta = 0.1 \text{ のとき, } (\Omega_m, g_{dBm}) = (0.990, 14.0)$$

が極大点である.

また, 位相線図は1次系とは異なり, 高周波の部分では位相遅れの最大値が -90 [deg]ではなく -180 [deg]となっている.

(4) 周波数応答法以外のシステム同定

ここでは、過渡応答について述べる。

《インパルス応答とステップ応答》

ある信号に対する出力信号の時間的变化を時間応答という。入力信号波形が不連続な変化をする場合、定常状態に達するまでの過渡的な時間帯における応答を過渡応答といい、十分な時間が経過して定常状態に達した状態の応答を定常応答という。

ある要素の伝達関数を $G(s)$ 、入力信号を $x(t)$ 、 $x(t)$ のラプラス変換を $X(s)$ 、時間応答を $y(t)$ 、 $y(t)$ のラプラス変換を $Y(s)$ であらわすと、 $Y(s)$ は次のように求められる。

$$\begin{cases} Y(s) = G(s) \cdot X(s) \\ y(t) = L^{-1}[Y(s)] \end{cases}$$

時間応答 $y(t)$ は、入力信号 $x(t)$ の波形によって異なる。入力がインパルス関数の場合の応答をインパルス応答、ステップ関数の場合の応答をステップ応答という。ある要素の時間応答の一般的な特徴を知るには、ステップ応答を調べる方法がよく用いられる。図 5.4 にステップ応答の概念図を示す。



図 5.4 ステップ応答の概念図⁵⁾

《1次遅れ要素のステップ応答》

では、例として最も基本となる要素である1次遅れ要素について、そのステップ応答を求めてみよう。1次遅れ要素の伝達関数は、式(11)より

$$(11) \Leftrightarrow G(s) = \frac{K}{1+Ts}$$

である。単位ステップ関数 $u(t)$ のラプラス変換は $1/s$ なので、ステップ応答のラプラス変換は次式となる。

$$\begin{aligned} Y(s) &= G(s) \cdot X(s) \\ &= \frac{K}{s(1+sT)} \\ &= \frac{K}{s} - \frac{K}{s+1/T} \end{aligned}$$

ラプラス変換すると、

$$y(t) = K(1 - e^{-t/T}) \quad \text{--- (5.10)}$$

が得られる。 t を横軸にとって $y(t)$ を描くと、図 5.5 のような立ち上がって飽和する波形となる。図より、 $y(t)$ の最終値がゲイン定数 K の値に等しくなること、および、 $t=T$ の時間において $y(t)$ は最終値 K の $1/e = 63[\%]$ となることが知られている。このように時定数 T は定常状態に達するまでにかかる時間の目安となる。なお、 $y(t)$ のカーブに対し $t=0$ の点で接線を引くと、接線は $T = (K/T)t$ となる。したがって、接線が漸近線 $y = K$ と交わる時間が時定数 T に等しくなる。

整定時間 T_s は「最終値の $\pm 5\%$ 以内に収まるまでの時間」定義される。

式(5.10)より, T_s は次のように表される.

$$T_s \cong 4T$$

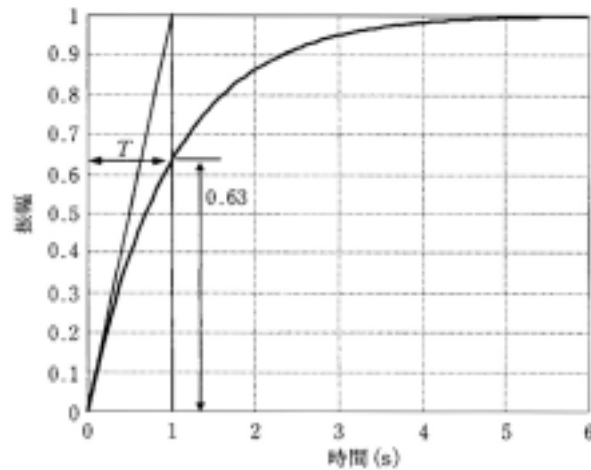


図 5.5 1次遅れ要素のステップ応答⁵⁾

6. 結言

測定した, シミュレーションも実験もグラフは誤差の範囲には一致しなかった. ただし, 4. 3節で行った誤差の計算は概算値であるのであり, 含めていない誤差もあるので, 測定値から大きく離れた値もなく, 成功したと言える.

制御の授業でも学んでいない, システムのモデリングとシステム同定, 周波数応答法がこの実験を通して学習することができた.

《参考文献》

- 1) 細江繁幸: システムと制御, オーム社 (2003) p.35~43
- 2) 下西二郎・奥平鎮正: 制御工学, コロナ社 (2001) p.75~88
- 3) マグロウヒル大学演習: システム制御(II), オーム社 (1998) p.123,124
- 4) 加川幸雄: 入門数値解析, 朝川書店 (2000)
- 5) 竹田宏: 入門制御工学, 朝倉書店 (2000) p.54~56