１．　目的

　現代制御理論を用いて多変数制御系の設計を行う際には，計算機の利用が不可欠である．それは，制御系設計においては設計自由度を適切に調整することが必要であり，そのたびに繰り返し制御系の計算を行わなければならないためである．
　現在では，複雑な計算を必要とする制御系の設計および解析が CAD 等によるコンピュータを用いて容易に実現できるようになり，それと同時に実用システムの高機能化の要求も大きくなっている．
　したがって，コンピュータを用いた解析および制御，そして制御を行うために，いかにして制御理論を使うかを学習することは大変重要となっている．

　今回の機械工学実験では，制御系 CAD を用いた液位制御系の特性解析を行う．
　流入量を操作量，液位を制御量とする液位プロセスを制御対象とし，この系に比例および比例＋積分特性の制御装置（調節計）を用いたフィードバック制御を施したとき，その特性を制御系 CAD によって解析する．

２．　制御理論および特性検討方法

２．１　制御対象の特性

　制御対象を図１に示す液位プロセス系として，図中の記号を下記のように定める．

A ：タンクの断面積 [m2]
q_{i0} ：平衡状態での流入量，流出量 [m3/sec]
h_0 ：平衡状態での液位 [m]
$q_1(t)$ ：流入量の平衡状態からの変化量 [m3/sec]
$q_2(t)$ ：流出量の平衡状態からの変化量 [m3/sec]
$h(t)$ ：液位の平衡状態からの変化量 [m]

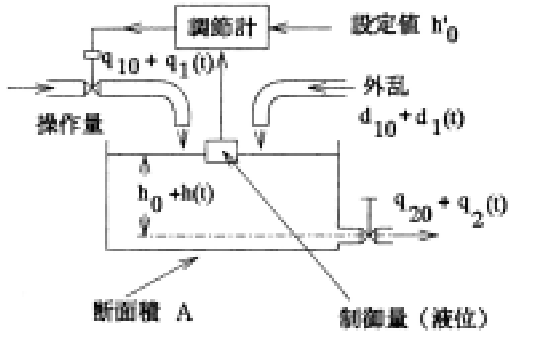

図１　液位プロセス制御系

　図に示す液位系において，その流入量を入力，その液位を出力とするとき，この系（タンクの特性）を記述する微分方程式を求める．ただし，流出量は液位の平方根に比例するものとする．平衡状態においては

$$q_{10} + d_{10} = q_{20} \qquad ———（１）$$

$$q_{20} = k\sqrt{h_0} \qquad ———（２）$$

が成立する．ただし，k は比例定数である．
　タンク系における物質収支の関係より
　（微小時間における体積変化量）＝（微小時間における流入出の変化）

$$\Rightarrow \quad A \cdot dh(t) = [(q_1(t) + d_1(t)) - q_2(t)] \cdot dt$$

$$\Leftrightarrow \quad A\frac{dh(t)}{dt} = q_1(t) - q_2(t) + d_1(t) \qquad ———（３）$$

となる．
　一方，液位が変化すれば流出量も変化して

$$q_{20} + q_2(t) = k\sqrt{h_0 + h(t)} \qquad ———（4）$$

が成立する．

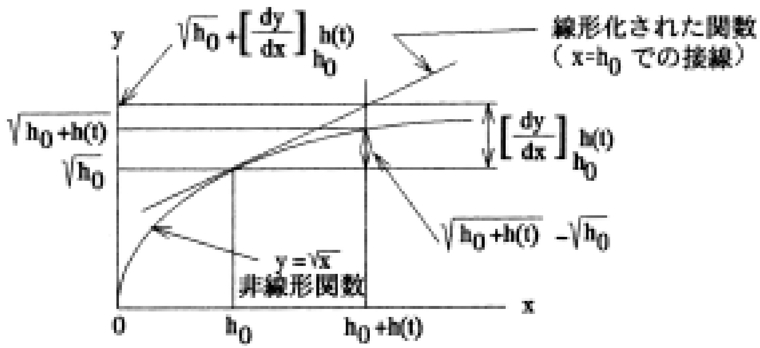

図２　非線形関数の線形化

式(3),(4)より $q_2(t)$ を消去して次式(5)を得る．

$$A\frac{dh(t)}{dt}+k\sqrt{h_0+h(t)}=q_1(t)+q_{20}+d_1(t) \qquad \text{———（５）}$$

式(5)は非線形微分方程式であり，これを線形化する．（図２参照）

　まず，式(5)の左辺第２項はテーラーの定理より，

$$k\sqrt{h_0+h(t)}=k\sqrt{h_0}\left\{1+\frac{h(t)}{h_0}\right\}^{\frac{1}{2}}=k\sqrt{h_0}\left[1+\frac{1}{2}\frac{h(t)}{h_0}+\frac{1}{2\cdot 2!}\left(\frac{h(t)}{h_0}\right)^2+\cdots\cdots\right] \qquad \text{———（６）}$$

と展開できる．ここで，$h(t)$ は液位の平衡状態からの変化量なので，微小変化量とすると，二乗以上の第３項以下を省略すると，

$$k\sqrt{h_0+h(t)}\approx k\sqrt{h_0}\left(1+\frac{h(t)}{2h_0}\right) \qquad \text{———（６）'}$$

また，式(2)より，$q_{20}=k\sqrt{h_0}$ なので上式は，

$$k\sqrt{h_0+h(t)}\approx q_{20}\left[1+\frac{h(t)}{2h_0}\right]=q_{20}+\frac{q_{20}}{2h_0}h(t) \qquad \text{———（７）}$$

となる．

　したがって，式(7)を式(5)に代入すると，式(5)は次のように線形化される．

$$(5)\Leftrightarrow\quad A\frac{dh(t)}{dt}+q_{20}+\frac{q_{20}}{2h_0}h(t)=q_1(t)+q_{20}+d_1(t)$$

$$\Leftrightarrow\quad A\frac{dh(t)}{dt}+\frac{q_{20}}{2h_0}h(t)=q_1(t)+d_1(t) \qquad \text{———（８）}$$

さらに，上式の両辺を $q_{20}/2h_0$ でわれば次式を得る．

$$\frac{2Ah_0}{q_{20}}\frac{dh(t)}{dt}+h(t)=\frac{2h_0}{q_{20}}\left[q_1(t)+d_1(t)\right] \qquad \text{———（９）}$$

　式(9)で表現される要素を一次遅れ系という．式中の $2Ah_0/q_{20}=T$ は時間（sec）の次元を持ち，時定数とよばれる．この系の特性解析に先立ち，式(9)をつぎのように無次元化する．まず，式(9)の両辺を h_0 でわると，

$$\frac{2Ah_0}{q_{20}}\frac{dh(t)}{h_0\cdot dt}+\frac{h(t)}{h_0}=\frac{2}{q_{20}}\left[q_1(t)+d_1(t)\right]$$

ここで，時定数：$T = 2Ah_0 / q_{20}$を用いて，$h_0 = const$，$q_{20} = const$より式を整理すると，

$$\Leftrightarrow \quad \frac{T}{dt}\cdot\frac{dh(t)}{h_0}+\frac{h(t)}{h_0}=2\left[\frac{q_1(t)}{q_{20}}+\frac{d_1(t)}{q_{20}}\right]$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{d(h(t)/h_0)}{d(t/T)}+\frac{h(t)}{h_0}=2\left[\frac{q_1(t)}{q_{20}}+\frac{d_1(t)}{q_{20}}\right] \qquad ———（10）$$

となる．

さらに，$y(t)\equiv h(t)/h_0$，$m(t)\equiv q_1(t)/q_{20}$，$d(t)\equiv d_1(t)/q_{20}$，$u(t)\equiv m(t)+d(t)$と定義すると，式(10)はつぎのように表現できる．

$$\dot{y}(t)+y(t)=2(m(t)+d(t))=2\cdot u(t) \qquad ———（11）$$

ただし，・は無次元された時間についての微分を表す．

上式をラプラス変換し，流入水量$U(s)$から液位$Y(s)$に至る伝達関数$G_p(s)$を求めると，次式となる．

$$(11)\Leftrightarrow \quad L[\dot{y}]+L[y]=2L[u]$$
$$\Leftrightarrow \quad sY(s)-y(0)+Y(s)=2U(s)$$
$$\Leftrightarrow \quad (s+1)Y(s)=2U(s) \qquad \because \quad y(0)=0$$
$$\Leftrightarrow \quad Y(s)=\frac{2}{s+1}U(s)$$
$$\therefore \quad G_p(s)=\frac{Y(s)}{U(s)}=\frac{2}{s+1} \qquad ———（12）$$

以下では，液位プロセス系の特性をこの$G_p(s)$で表し，解析を行うものとする．

２．２ 制御系の構造

ここでは,前節で述べた液位プロセスの液位を制御するため図３のような構造のフィードバック制御系を構造する．

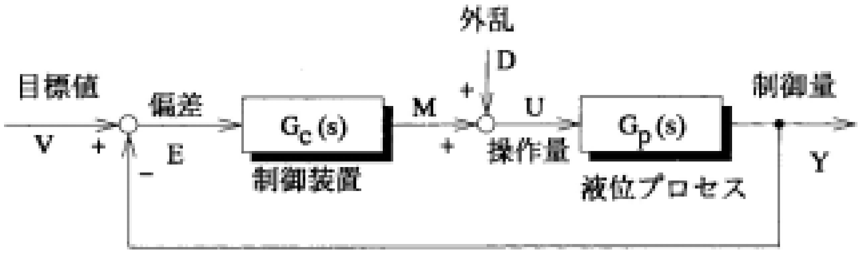

図３　PI 制御系

図中，vは無次元された目標値（$v(t)=h'(t)/h_0-1$）を，eは偏差（$e(t)=v(t)-y(t)$）を，また$G_c(s)$は制御装置の伝達関数を表す．

図３より，制御量$Y(s)$および流入量$M(s)$は，

$$Y(s)=G_p(s)\cdot U(s)=G_p(s)\cdot\{M(s)+D(s)\} \qquad ———（13）$$
$$M(s)=G_c(s)\cdot E(s)=G_c(s)\cdot\{V(s)-Y(s)\} \qquad ———（14）$$

である．式(13)に式(14)を代入して$M(s)$を消去すると，

$$(13)\Leftrightarrow \quad Y(s)=G_p(s)\cdot\{G_c(s)\cdot[V(s)-Y(s)]+D(s)\}$$

$$\Leftrightarrow \quad \{1+G_p(s)\cdot G_c(s)\}\cdot Y(s)=G_p(s)\cdot G_c(s)\cdot V(s)+G_p(s)\cdot D(s)$$

$$\Leftrightarrow \quad Y(s)=\frac{G_p(s)\cdot G_c(s)}{1+G_p(s)\cdot G_c(s)}\cdot V(s)+\frac{G_p(s)}{1+G_p(s)\cdot G_c(s)}\cdot D(s) \qquad ――― (15)$$

となる．式(15)の右辺の第１項は目標値$V(s)$と制御量$Y(s)$との関係を示し，その伝達関数は閉ループ伝達関数と呼ばれ$G_T(s)$で表すと，

$$G_T(s)=\frac{G_p(s)\cdot G_c(s)}{1+G_p(s)\cdot G_c(s)} \qquad ――― (16)$$

となる．また，第２項は外乱$D(s)$と制御量$Y(s)$との関係を示している．

また，この制御系において偏差$e(t)$は以下のように表される．

$$L[e(t)]=E(s)=V(s)-Y(s)$$

$$=V(s)-\frac{G_c(s)G_p(s)}{1+G_c(s)G_p(s)}\cdot V(s)-\frac{G_p(s)}{1+G_c(s)G_p(s)}\cdot D(s) \qquad \because (15)$$

$$=\frac{1}{1+G_c(s)G_p(s)}\cdot V(s)-\frac{G_p(s)}{1+G_c(s)G_p(s)}\cdot D(s)$$

したがって，偏差$e(t)$は，

$$e(t)=L^{-1}\left[\frac{1}{1+G_c(s)G_p(s)}\cdot V(s)-\frac{G_p(s)}{1+G_c(s)G_p(s)}\cdot D(s)\right] \qquad ――― (17)$$

また，定常偏差は，

$$\lim_{t\to\infty}e(t)=\lim_{t\to\infty}L^{-1}\left[\frac{1}{1+G_c(s)G_p(s)}\cdot V(s)-\frac{G_p(s)}{1+G_c(s)G_p(s)}\cdot D(s)\right] \qquad ――― (18)$$

最終値定理より，

$$\lim_{t\to\infty}e(t)=\lim_{t\to\infty}L^{-1}[E(s)]=\lim_{s\to 0}sE(s)$$

$$=\lim_{s\to 0}\left\{\frac{s}{1+G_c(s)G_p(s)}\cdot V(s)-\frac{sG_p(s)}{1+G_c(s)G_p(s)}\cdot D(s)\right\} \qquad ――― (19)$$

制御装置としては種々の構造，特性のものが考えられるが，ここでは偏差eを入力，流入量mを出力とするつぎの２種類の特性のものを検討する．

(i) 比例動作（P(roportional)動作）

$$m(t)=k_p e(t) \qquad k_p：比例感度 \qquad ――― (20)$$

比例動作の伝達関数$G_c(s)$は式(20)をラプラス変換することで，つぎのように得られる．

$$G_c(s)=M(s)/E(s)=k_p \qquad ――― (21)$$

(ii) 比例・積分動作（P(roportional)＋I(ntegral)動作）

$$m(t)=k_p\left(e(t)+\frac{1}{Ti}\int_0^t e(\tau)d\tau\right) \qquad ――― (22)$$

T_i ：積分時間

制御装置の伝達関数$G_c(s)$は比例動作の場合と同様にしてラプラス変換により

$$G_c(s)=k_p\left(1+\frac{1}{T_i s}\right)=\frac{k_p T_i s+k_p}{T_i s} \qquad ――― (23)$$

となる．

ただし，式(23)を見ても分かるように，式(21)は式(23)の積分時間$T_i\to\infty$とした時を意味するものである．

いま，目標値$v(t)$および外乱$d(t)$がステップ入力である時，$V(s)=D(s)=1/s$ であるので，このことと式(23)および$G_p(s)$には液位プロセス系の特性式(12)を用いると式(19)は，

$$
\begin{aligned}
(19)\Leftrightarrow\quad \lim_{t\to\infty}e(t)&=\lim_{s\to 0}\left\{\frac{s}{1+G_c(s)G_p(s)}\cdot\frac{1}{s}-\frac{sG_p(s)}{1+G_c(s)G_p(s)}\cdot\frac{1}{s}\right\}\\
&=\lim_{s\to 0}\left\{\left[1+\frac{k_pT_is+k_p}{T_is}\cdot\frac{2}{s+1}\right]^{-1}-\frac{2}{s+1}\cdot\left[1+\frac{k_pT_is+k_p}{T_is}\cdot\frac{2}{s+1}\right]^{-1}\right\}\\
&=\lim_{s\to 0}\left\{\frac{s-1}{s+1}\cdot\frac{T_is(s+1)}{T_is(s+1)+2(k_pT_is+k_p)}\right\}\\
&=\lim_{s\to 0}\left\{\frac{T_is(s-1)}{T_is(s+1)+2(k_pT_is+k_p)}\right\} \qquad ―――(24)
\end{aligned}
$$

また，目標値に対する定常偏差e_vおよび，外乱に起因する定常偏差e_dを個々に比べると，

$$e_v=\lim_{s\to 0}\left\{\frac{T_is(s+1)}{T_is(s+1)+2(k_pT_is+k_p)}\right\} \qquad ――― (25)$$

$$e_d=\lim_{s\to 0}\left\{-\frac{2T_is}{T_is(s+1)+2(k_pT_is+k_p)}\right\} \qquad ―――(26)$$

ただし，$\lim_{t\to\infty}e(t)=e_v+e_d$である．

３． 制御系の特性解析

３．１ フィードバック制御系の評価方法

◆　フィードバック制御系の基本的性質

１）外乱の影響の軽減

外乱 d が制御系に加わった場合の制御量 y の応答特性をフィードバックを行った場合（制御装置が比例動作，比例・積分動作の場合），行わない場合について比較する．

２）目標値への追従

目標値 v をステップ状に変化させたときの制御量 y の応答特性を調べる．

◆ フィードバック制御系に要求される特性

１）安定性（減衰性）

制御装置の特性を比例動作あるいは比例･積分動作としたとき, また, その係数 k_p，T_i を変化させたとき，閉ループ系の安定性（減衰性）がどのように変化するかを調べる．

２）過渡特性

制御装置の k_p，T_i を変化させたときの過渡特性がどのように変化するかを調べる．また，このときの閉ループ系の極と制御量 y の過渡特性との関係を考察する．

３）定常特性

目標値 v を変化させた場合，外乱 d を加えた場合，十分に時間が経過した後に制御目的（偏差 e が零となること）が達成されるか否かを目標値，制御装置の特性（比例動作，比例・積分動作）を変えて調べ，その関係を明らかにする．

３．２ 安定性解析

≪参考≫

図 3.2.1 のようなフィードバック制御系を考えた時，閉ループ伝達関数は，

$$W(s)=\frac{N_c(s)}{D_c(s)}=\frac{G(s)}{1+G(s)H(s)} \qquad \text{———（3.2.1）}$$

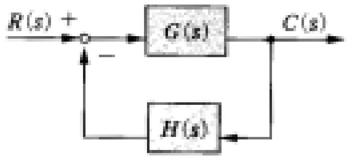

図 3.2.1　フィードバック制御系

ここで分母が 0 となる特性方程式を考える．単位ステップを用いた時のインデンシャル応答を考えると，W(s)は，

$$W(s)=\frac{N_c(s)}{D_c(s)}=\frac{b_0s^m+b_1s^{m-1}+\cdots\cdots+b_m}{s^n+a_1s^{n-1}+\cdots\cdots+a_n} \quad （n \ge m） \qquad \text{———（3.2.2）}$$

で表され，さらに W(s)が単極のみを持つ場合を考えると，その応答は

$$A(t)=L^{-1}\left[W(s)\cdot\frac{1}{s}\right]=\frac{N_c(0)}{D_c(0)}+\sum_{i=1}^{n}\frac{N_c(s_i)}{D_c'(s_i)s_i}\cdot\exp(s_it)=A_s+\sum_{i=1}^{n}A_i\exp(s_it) \qquad \text{———（3.2.3）}$$

で与えられる（重根を持つときは $A_it^i\exp(s_it)$ の項が現れる）．ここで，第 1 項は定常項，第 2 項は過渡項である. そのとき時間の経過とともに過渡項が減衰し定常状態に落ち着く時，この制御系は安定であるといい，過渡項が発散する時は不安定であるという．また減衰も発散もしないで一定幅で振動する時，安定限界にあるという．式(3.2.3)において s_i，s_{i+1} が共役複素根すなわち $s_i, s_{i+1}=\alpha_i \pm j\beta_i$ のときには

$$A_i \exp(s_i t) + A_{i+1} \exp(s_{i+1} t) = K_i \exp(\alpha_i t) \cdot \sin(\beta_i t + \phi_i)$$

となることに注意すれば,

① すべての特性根の実部が負の時，安定.

② 特性根のうち一つでも実部が正のものがあれば不安定.

③ 実部が 0 の特性根が存在し，他の特性根の実部が負であれば安定限界.

となる.

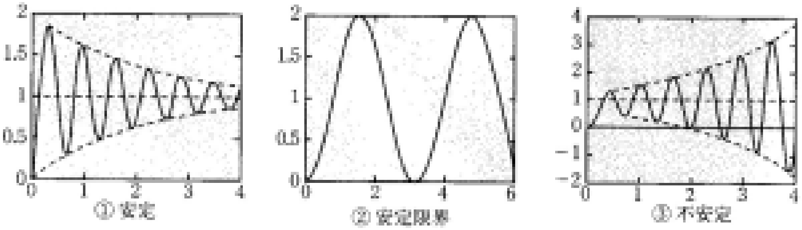

図 3.2.2　インデンシャル応答

式(16)より閉ループ伝達関数は,

$$(16) \Leftrightarrow \quad \frac{Y(s)}{V(s)} = G_T(s) = \frac{G_p(s) \cdot G_c(s)}{1 + G_p(s) \cdot G_c(s)} = \frac{2(k_p T_I s + k_p)}{T_I s(s+1) + 2(k_p T_I s + k_p)}$$

この式の分母の式を

$$B(s) = T_I(s+1) + 2(k_p T_I s + k_p) = T_I s^2 + (2k_p T_I + T_I)s + 2k_p \qquad ―――(27)$$

として，$B(s) = 0$ の特性方程式を考えると，安定条件は，「すべての特性根の実部が負であるとき」となる.

ただし，式(27)の各項の係数の正負を問わず，特性根の実部が 0 となる根を一つでも持つとき，出力は安定限界となり正弦波となる.

また，特性方程式において根は,

$$T_I s^2 + (2k_p T_I + T_I)s + 2k_p = 0$$

$$s = \frac{-(2k_p T_I + T_I) \pm \sqrt{T_I{}^2 (2k_p + 1)^2 - 8k_p T_I}}{2T_I} \qquad ―――（28）$$

となる.

また，特性方程式の判別式は

$$H = T_I{}^2 (2k_p + 1)^2 - 8k_p T_I \qquad ―――（29）$$

この判別式の２変数関数のグラフを図４に，等高線の２次元グラフを図５に示す.

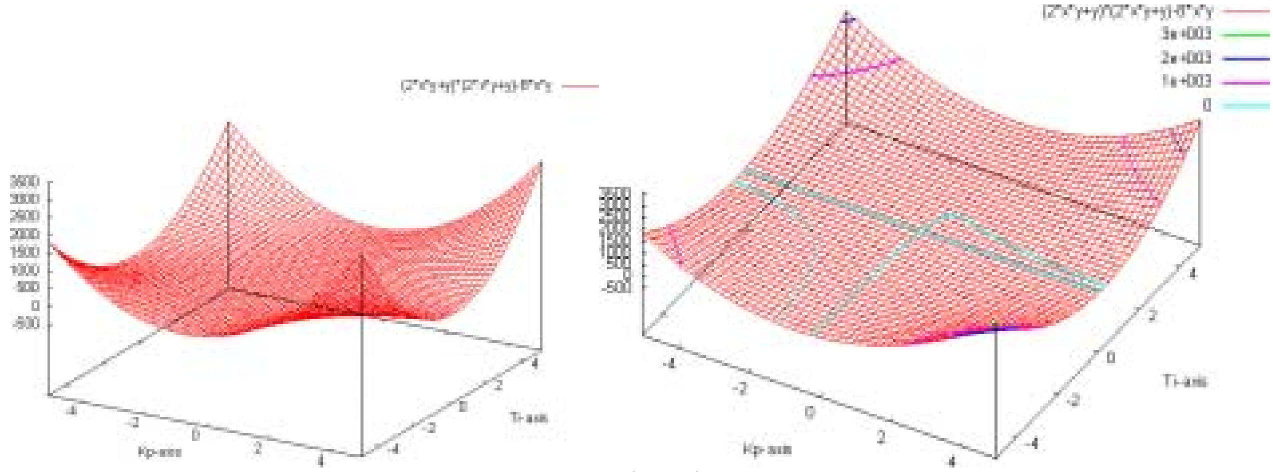

図４　判別式 H

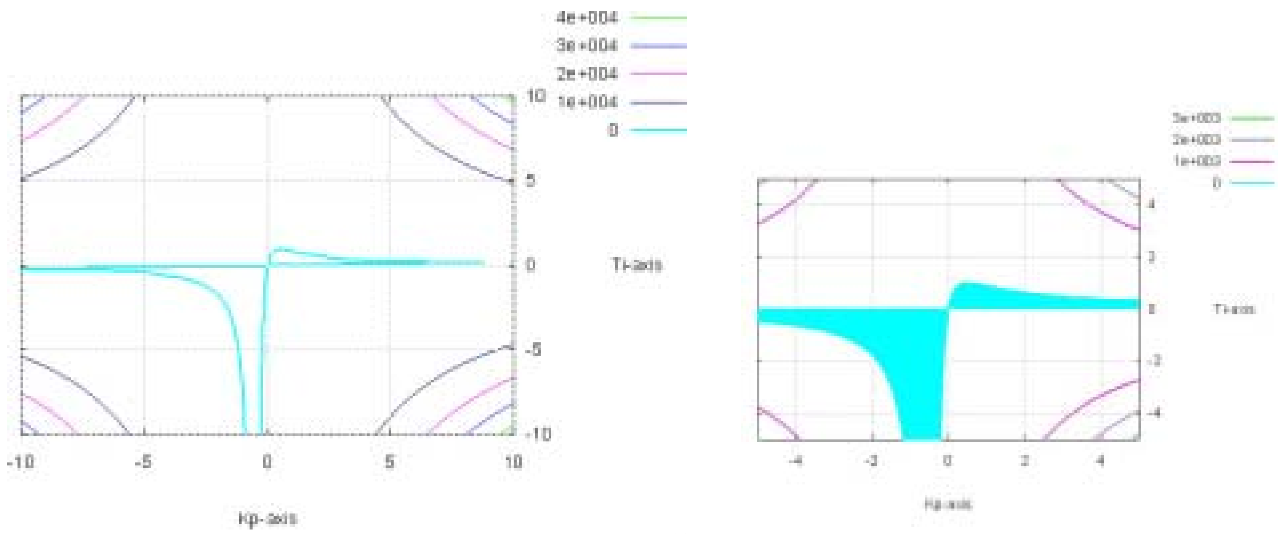

図５　判別式 H の等高線

したがって，図５の色付けした部分は判別式が負であるので，式(28)の根号の項は虚数となる．

よって，安定判別を行う上で，特性方程式の根に虚数を含むか否かを考慮して安定条件を判断する必要がある．

（１）　$H \geq 0$ ；根に虚数を含まない時

特性方程式の根に虚数を含まない時，式(28)の根の正負が安定条件にかかわることになる．まず，式(28)において，特性根のひとつである

$$s_1 = \frac{-\left(2k_p T_I + T_I\right) + \sqrt{T_I{}^2\left(2k_p + 1\right)^2 - 8k_p T_I}}{2T_I}$$

の正負を比較する．

図６に s_1 の表すグラフを，図６のグラフの等高線を２次元表示したグラフを図７に示す．

図７から伺えることは，第１象限は虚数が現れる部分を除きすべて負．第２象限は全領域にわたって正．第３象限は虚数が現れる部分を除き，Kp＜－0.5 の範囲では正，Kp＞－0.5 の範囲では負である．第４象限は全領域にわたって負である．

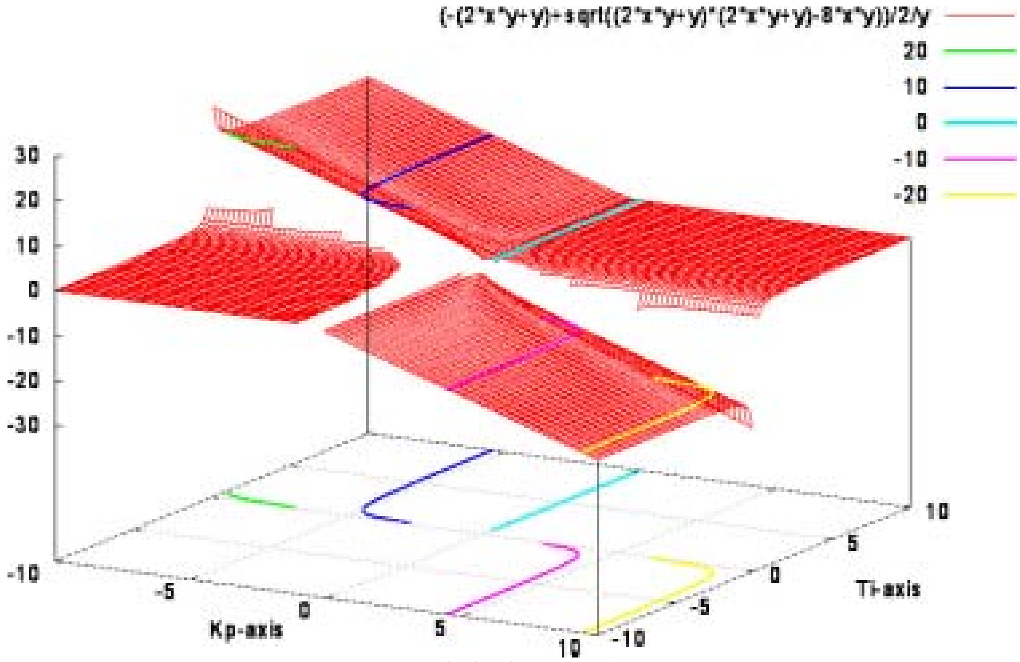

図６　特性方程式の根１

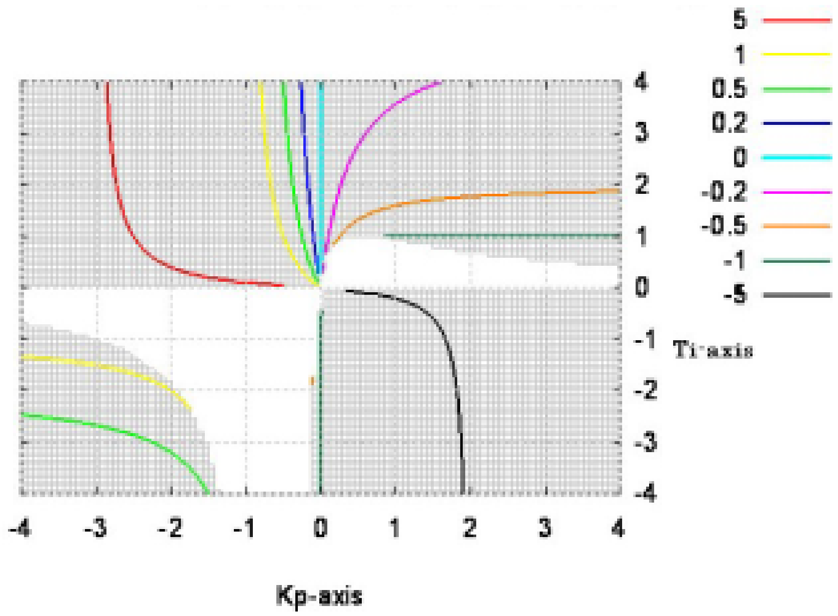

図７　特性根１の等高線

同様にして，もうひとつの特性根，

$$s_2 = \frac{-\left(2k_pT_I + T_I\right) - \sqrt{T_I^{\,2}\left(2k_p + 1\right)^2 - 8k_pT_I}}{2T_I}$$

の正負を比較する．

図８に s_2 の表すグラフを，図８のグラフの等高線を２次元表示したグラフを図９に示す．

図８では，第１象限および第２象限は虚数が現れる部分を除きすべて負．第４象限は全領域にわたって正であるが，第３象限は虚数が現れる部分を除き，Kp＜－0.5 の範囲では正，Kp＞－0.5 の範囲では負である．

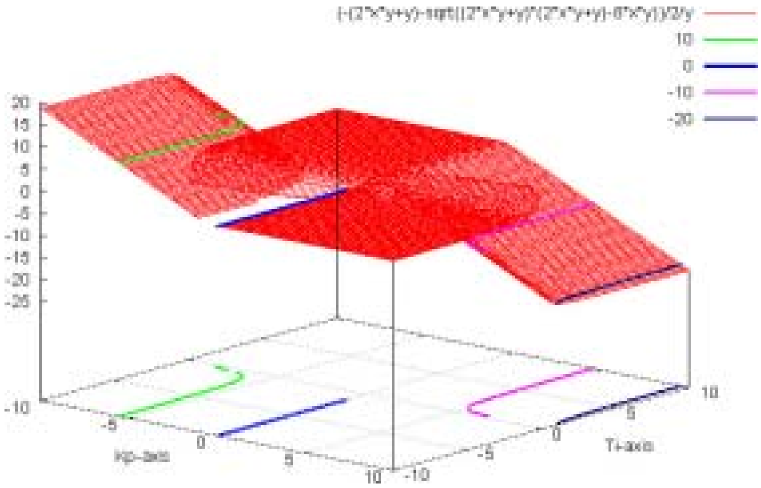

図８　特性方程式の根２

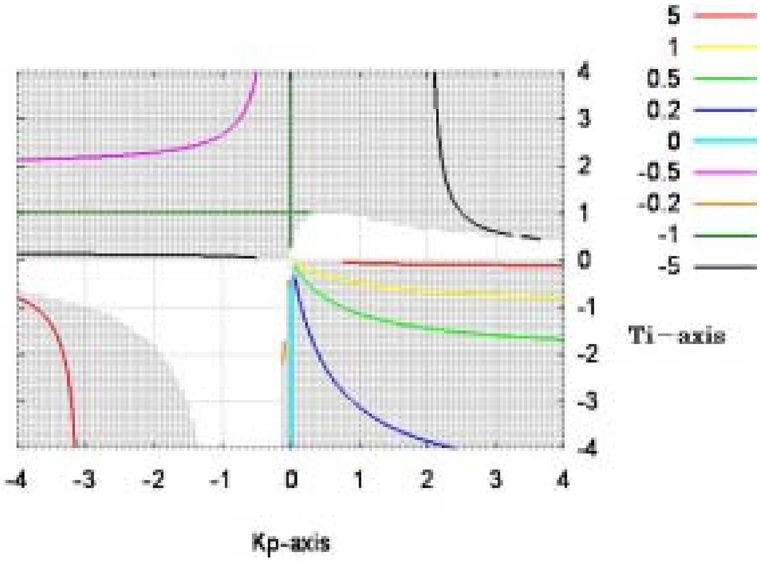

図９　特性根２の等高線

　したがって，図７～図９より，根に虚数が現れないとき，第１象限ではどちらの特性根も実部（＝根）が負なので，虚数が現れる領域を除き安定する．第２・第４象限では特性根の実部が正となるので不安定となる．

　第３象限では虚数が現れる部分を除き，－0.5＜Kp＜0 の範囲では根が常に負なので安定するが，Kp＜－0.5 の範囲では根が常に正であるので不安定となる．

（２）　$H<0$ ；根に虚数を含む時

　判別式が負である時，根は式(28)より，

$$(28)\Leftrightarrow \quad s=\frac{-\left(2k_pT_I+T_I\right)\pm j\sqrt{8k_pT_I-T_I{}^2\left(2k_p+1\right)^2}}{2T_I}$$

であるので（ j は虚数），このときの根の実部は，

$$s_R=\frac{-\left(2k_pT_I+T_I\right)}{2T_I}=-k_p-\frac{1}{2} \qquad ———（31）$$

である．よって，式(31)より

◆ $s_R < 0 \Leftrightarrow k_p > -0.5$ のとき安定.

◆ $s_R = 0 \Leftrightarrow k_p = -0.5$ のとき安定限界.

◆ $s_R > 0 \Leftrightarrow k_p < -0.5$ のとき不安定.

である.

３．３ 定常特性

式(24)で求めた，定常偏差 $\lim_{t\to\infty} e(t)$ の値を調べて判断する．

仮に，$\lim_{t\to\infty} e(t) = 0$ となれば制御目的が達成されたといえる．

$\lim_{t\to\infty} e(t) = \pm\infty$ であれば，その制御は発散しているといえる．

また，$\lim_{t\to\infty} e(t) = const$ となった場合は，その制御は制御量ｙに対して一定のオフセットを持ったまま収束することを意味する．

３．４ 特性

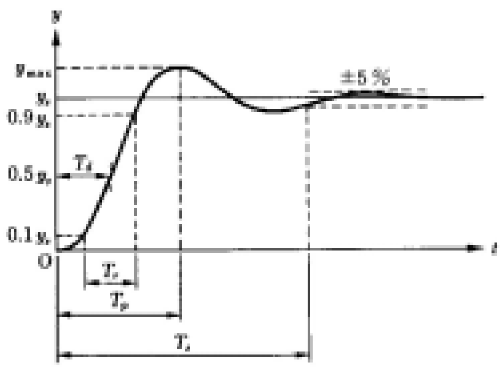

図 10　ステップ応答特性

たとえば，ステップ応答が図 10 のように振動的となった時，評価基準として次のような値が利用される．

① 立ち上がり時間 T_r ：応答 $y(t)$ が定常値 y_s の 10%に達してからから 90%に達するのに要する時間.

② 遅れ時間 T_d ：応答 $y(t)$ が定常値 y_s の 50%に達するのに要する時間.

③ 行き過ぎ量（最大オーバーシュート） A_m ：定常値 y_s と最大行き過ぎ量 $y_{\max}$ との差.

④ 行き過ぎ時間 T_p ：応答 $y(t)$ が最大オーバーシュート $y_{\max}$ に達するまでの時間.

⑤ 整定時間 T_s ：応答 $y(t)$ が定常値 y_s の±5%以内に落ち着くまでの時間.

立ち上がり時間 T_r，遅れ時間 T_d，行き過ぎ時間 T_p，整定時間 T_s はいずれも速応性にかかわるパラメータであり, 行き過ぎ量 A_m および整定時間 T_s は減衰性にかかわるパラメータである．

４． 考察

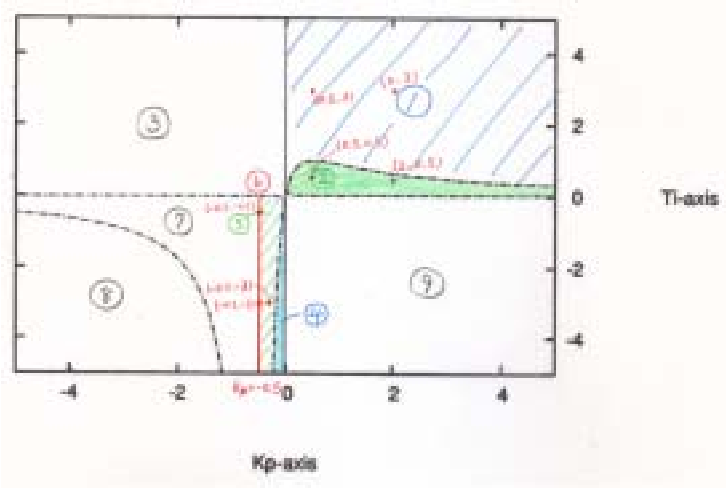

図 11　Kp－Ti マップ

今回の測定では，k_p=0.5,2 の２通り，T_I=0.5,3,∞の３通りの計６通りの組み合わせを基本にシミュレーションを行った.

前述の３．２節より図 11 で示す，領域③，⑦，⑧，⑨は不安定となる.

したがって，考察では安定となる領域①，②，④，⑤および安定限界領域⑥を扱う.

表１のように Kp と Ti の組み合わせに各番号をつける. No.１～６は実験中に与えられた基本パターン．No.７～９はシミュレーションを行った組み合わせ．No.10，No.11 はシミュレーションを行ってはいないが，安定領域である組み合わせである．No.10 および 11 は定常特性のみ考察を行う.

表1　判別式と実部の値

No	Kp	Ti	判別式	実部		領域
1	0.5	0.5	-1	-1		②
2	0.5	3	24	-0.18	-1.82	①
3	0.5	∞	+	-		①
4	2	0.5	-1.8	-2.5		②
5	2	3	177	-0.28	-4.72	①
6	2	∞	+	-		①
7	-0.5	-0.5	-2	0		⑥
8	-0.5	-3	-12	0		⑥
9	-0.3	-3	-5.8	-0.2		⑤
10	0.5	1	0	-2	-1.00	①+②
11	-0.01	-3	8.4	-0.97	-0.01	④

４．１ 定常特性

$T_I \to \infty$ のとき，式(24)～(26)の定常偏差の式は,

$$(24) \Leftrightarrow \quad \lim_{t\to\infty} e(t) = \lim_{s\to 0}\left\{\frac{T_i s(s-1)}{T_i s(s+1) + 2(k_p T_i s + k_p)}\right\}$$

$$= \lim_{s\to 0}\left\{\frac{s(s-1)}{s(s+1) + 2(k_p s + k_p / T_I)}\right\}$$

$$\to \lim_{s\to 0}\left\{\frac{s(s-1)}{s(s+1) + 2k_p s}\right\} \qquad (T \to \infty)$$

$$= \lim_{s\to 0}\left\{\frac{s-1}{s+1+2k_p}\right\}$$

$$= \frac{-1}{2k_p + 1} \qquad ―――(32)$$

また，目標値に対する定常偏差 e_v および，外乱に起因する定常偏差 e_d は,

$$(25) \Leftrightarrow \quad e_v = \lim_{s\to 0}\left\{\frac{T_i s(s+1)}{T_i s(s+1) + 2(k_p T_i s + k_p)}\right\} = \frac{1}{2k_p + 1} \qquad ―――(33)$$

$$(26) \Leftrightarrow \quad e_d = \lim_{s\to 0}\left\{-\frac{2T_i s}{T_i s(s+1) + 2(k_p T_i s + k_p)}\right\} = \frac{-2}{2k_p + 1} \qquad ―――(34)$$

である．

よって，$T \to \infty$ の No.3 および No.6 の定常偏差は,

No.3；$e_v = \dfrac{1}{2\times 0.5 + 1} = 0.5$， $e_d = \dfrac{-2}{2\times 0.5+1} = -1$

No.6；$e_v = \dfrac{1}{2\times 2 + 1} = 5$， $e_d = \dfrac{-2}{2\times 2+1} = -0.4$

である．

また，式(15)より，その収束値は,

$$v \to y \ ; \lim_{t\to\infty} y(t) = \lim_{s\to 0} s \cdot Y(s) = \lim_{s\to 0} s \cdot \frac{G_p(s)\cdot G_c(s)}{1 + G_p(s)\cdot G_c(s)} V(s)$$

$$= \lim_{s\to 0} \frac{2(k_p T_I s + k_p)}{T_I s(s+1) + 2(k_p T_I s + k_p)}$$

$$= \lim_{s\to 0} \frac{2(k_p s + k_p / T_I)}{s(s+1) + 2(k_p s + k_p / T_I)}$$

$$\to \lim_{s\to 0} \frac{2k_p s}{s(s+1) + 2k_p s} \qquad (T \to \infty)$$

$$= \lim_{s\to 0} \frac{2k_p}{s+1+2k_p}$$

$$= \frac{2k_p}{2k_p + 1}$$

$$d \to y \;;\; \lim_{t\to\infty} y(t) = \lim_{s\to 0} s\cdot Y(s) = \lim_{s\to 0} s\cdot \frac{G_p(s)}{1+G_p(s)\cdot G_c(s)} D(s)$$

$$= \lim_{s\to 0}\left\{\frac{s+1}{2} + k_p\left(1+\frac{1}{T_I s}\right)\right\}^{-1}$$

$$\to \lim_{s\to 0}\frac{1}{0.5(s+1)+k_p}$$

$$= \frac{2}{2k_p+1}$$

よって，$T\to\infty$ の No.3 および No.6 の制御量は,

No.3；$v \to y \;;\; \lim_{t\to\infty} y(t) = \dfrac{2\times 0.5}{2\times 0.5+1} = 0.5$，$d\to y \;;\; \lim_{t\to\infty} y(t) = \dfrac{2}{2\times 0.5+1} = 1$

No.6；$v \to y \;;\; \lim_{t\to\infty} y(t) = \dfrac{2\times 2}{2\times 2+1} = 0.8$，$d\to y \;;\; \lim_{t\to\infty} y(t) = \dfrac{2}{2\times 2+1} = 0.4$

である.

一方，k_p および T_I がそれほど大きくない時は（$|k_p|, |T_I| \le 3$程度），定常偏差は式(24),(25)および(26)より，

$$(24) \Leftrightarrow \quad \lim_{t\to\infty} e(t) = \lim_{s\to 0}\left\{\frac{T_i s(s-1)}{T_i s(s+1)+2(k_p T_i s + k_p)}\right\} = 0$$

$$(25) \Leftrightarrow \quad e_v = \lim_{s\to 0}\left\{\frac{T_i s(s+1)}{T_i s(s+1)+2(k_p T_i s + k_p)}\right\} = 0$$

$$(26) \Leftrightarrow \quad e_d = \lim_{s\to 0}\left\{-\frac{2T_i s}{T_i s(s+1)+2(k_p T_i s + k_p)}\right\} = 0$$

であり，その収束値は,

$$v \to y \;;\; \lim_{t\to\infty} y(t) = \lim_{s\to 0}\frac{2(k_p s + k_p/T_I)}{s(s+1)+2(k_p s + k_p/T_I)} = \frac{k_p}{T_I}\cdot\frac{T_I}{k_p} = 1$$

$$d \to y \;;\; \lim_{t\to\infty} y(t) = \lim_{s\to 0}\frac{2T_i s}{T_i s(s+1)+2(k_p T_i s + k_p)} = 0$$

となる.

よって，No.１，２，４，５，７～11 の目標値は一定の制御量（ｙ＝1）に収束し，外乱は 0 に収束する.

４．２ 過渡特性

以下に，No.１～９の過渡特性を記す．

また，外乱においては整定時間T_sにかわって，応答$y(t)$が最大値$y_{\max}$の±5%以内に落ち着くまでの時間T_s'を代用して用いることとする．

（1） No.1；Kp=0.5，Ti=0.5

図 12，13 にシミュレーション結果を示す．Kp と Ti のこの組み合わせは領域②であり，特性根に虚数を含むため，応答の結果にも振動の傾向が見られる．特に，目標値と制御量の関係ではオーバーシュートが発生することが最大のポイントである．

$v \to y$ ；$T_r = 1.1$，$T_d = 0.56$，$A_m = 106\%$，$T_p = 2.4$，$T_s = 3.1$

$d \to y$ ；$y_{\max} = 0.64$，$T_p = 0.75$，$T_s{}' = 2.9$

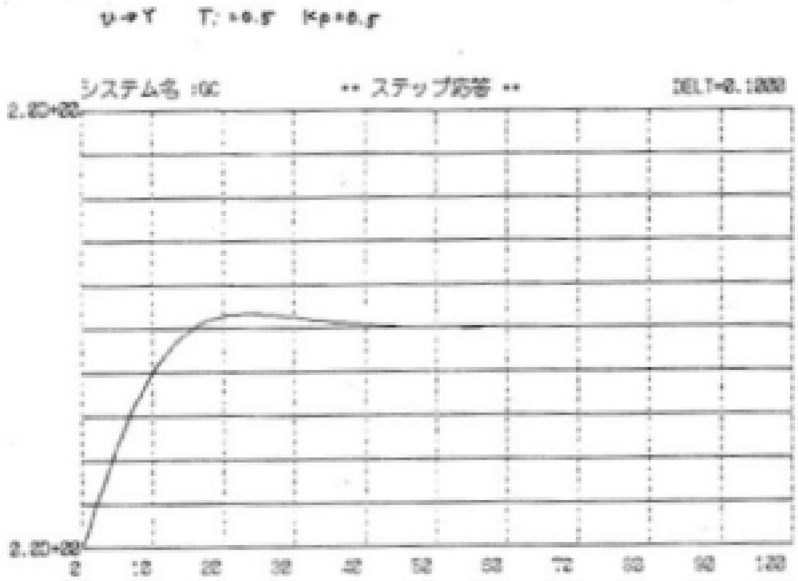

図 12　目標値$v(t)$に対する制御量$y(t)$

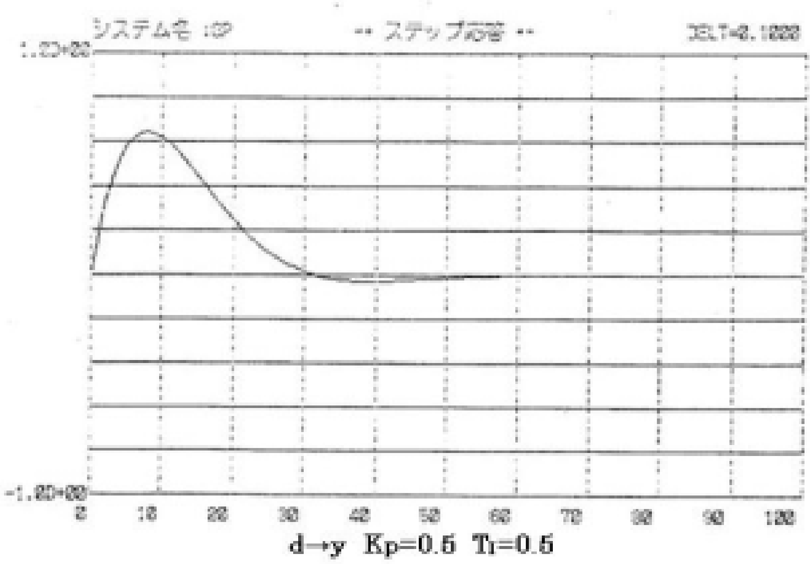

図 13　外乱$d(t)$に対する制御量$y(t)$

（2） **No. 2；Kp=0.5，Ti=3**

図 14，15 にシミュレーション結果を示す．Kp と Ti のこの組み合わせは領域①であり，この領域のグラフはオーバーシュートすることなく一定時間後には一定値に収束する．

$$v \to y \;；T_r = 9.0，T_d = 0.33，T_s = 12$$

$$d \to y \;；y_{\max} = 0.85，T_p = 1.4，T_s' = \text{大}$$

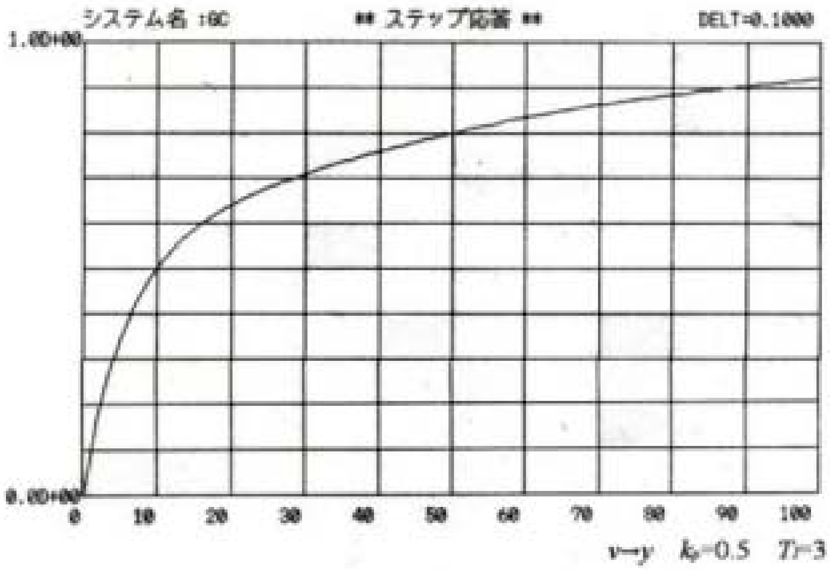

図 14　目標値 $v(t)$ に対する制御量 $y(t)$

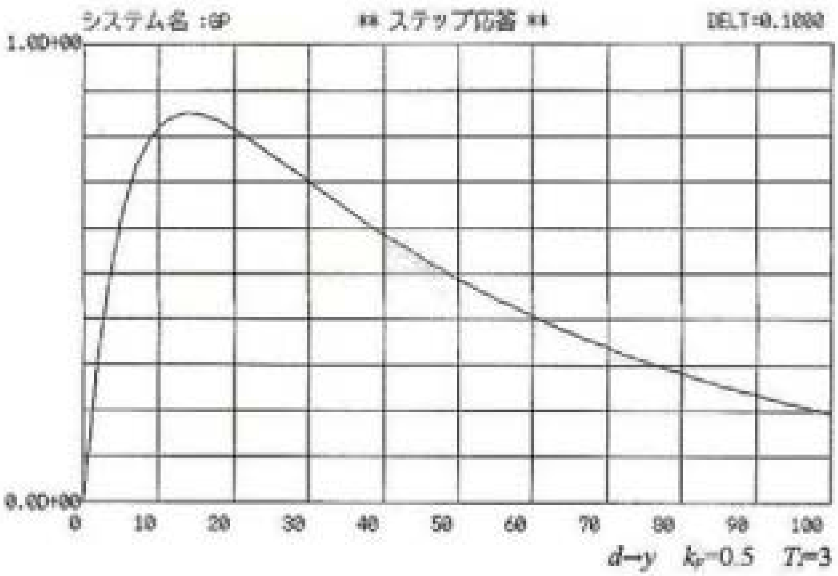

図 15　外乱 $d(t)$ に対する制御量 $y(t)$

（３） **No.３；Kp=0.5，Ti=∞**

図16, 17にシミュレーション結果を示す. KpとTiのこの組み合わせは領域①であるが，Tiの値が大きいため，前節でも述べたように定常偏差は０にならず，応答にオフセットを持つことになる. 図を見ても分かるよう, 一定時間後には目標値に対する制御量はｙ＝0.5, 外乱に対する制御量への影響は1.0であり，これは４．１節で計算した値と一致している.

$v \to y$ ；$T_r = 1.2$，$T_d = 0.38$，$T_s = 1.7$
$d \to y$ ；$T_r = 1.2$，$T_d = 0.38$，$T_s = 1.5$

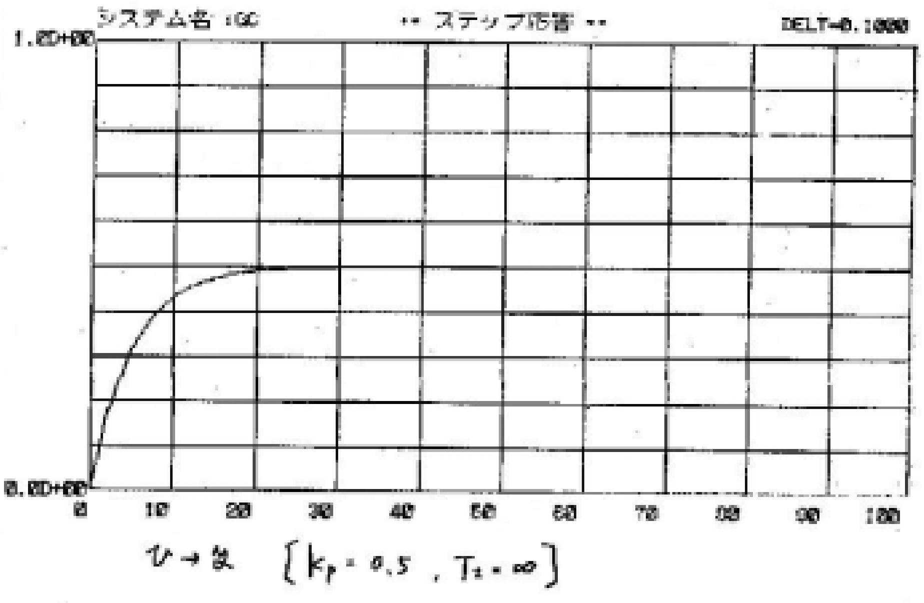

図16　目標値$v(t)$に対する制御量$y(t)$

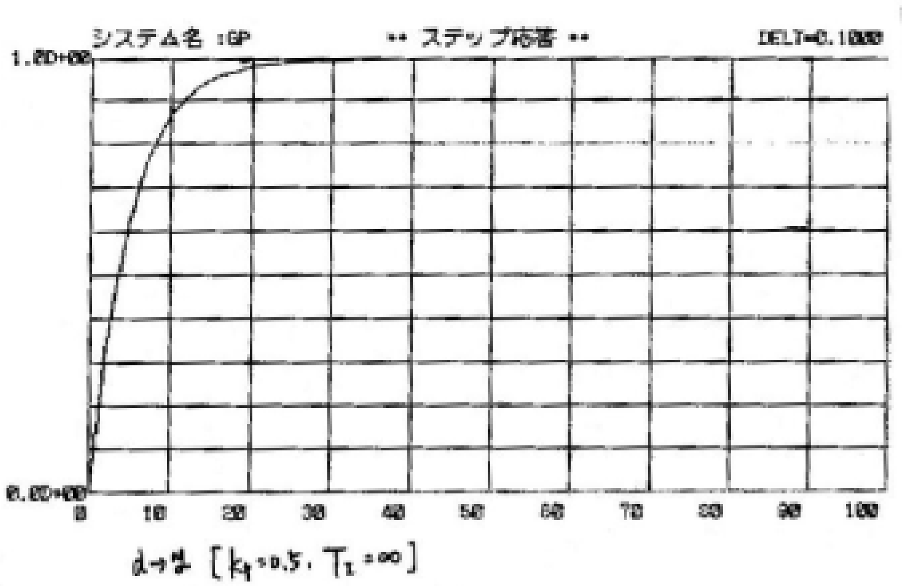

図17　外乱$d(t)$に対する制御量$y(t)$

（4） No.４；Kp=２，Ti=0.5

図 18，19 にシミュレーション結果を示す．Kp と Ti のこの組み合わせは領域②であり，No.1 と同様にオーバーシュートが発生している．No.1 と比べて，目標値ではオーバーシュートの大きさには大差は無いが，速応性が高くなっていることが分かる．外乱では，速応性が高くなると同時に $y_{\max}$ は小さくなっており，減衰性も高くなっている．

$$v \to y \;；T_r = 0.31，\; T_d = 0.13，\; A_m = 108\%，\; T_p = 0.88，\; T_s = 1.3$$

$$d \to y \;；\; y_{\max} = 0.28，\; T_p = 0.38，\; T_s{}' = 1.7$$

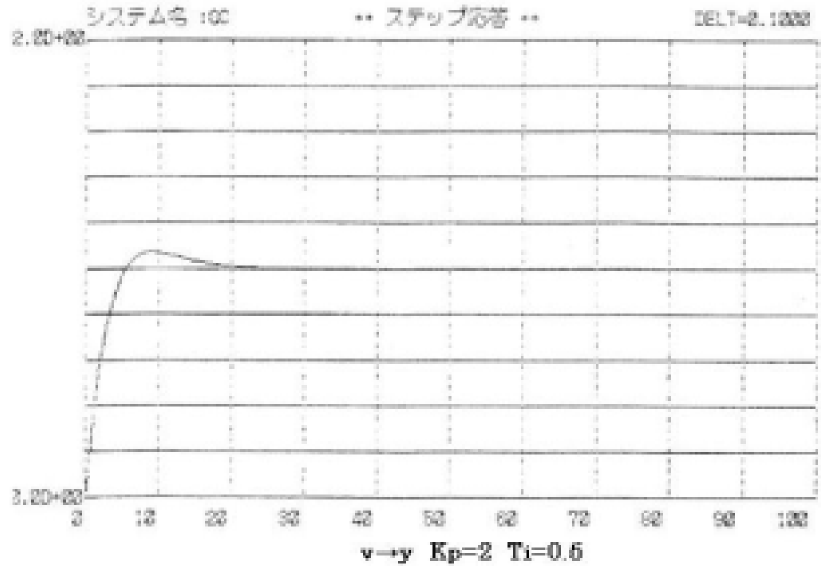

図 18　目標値 $v(t)$ に対する制御量 $y(t)$

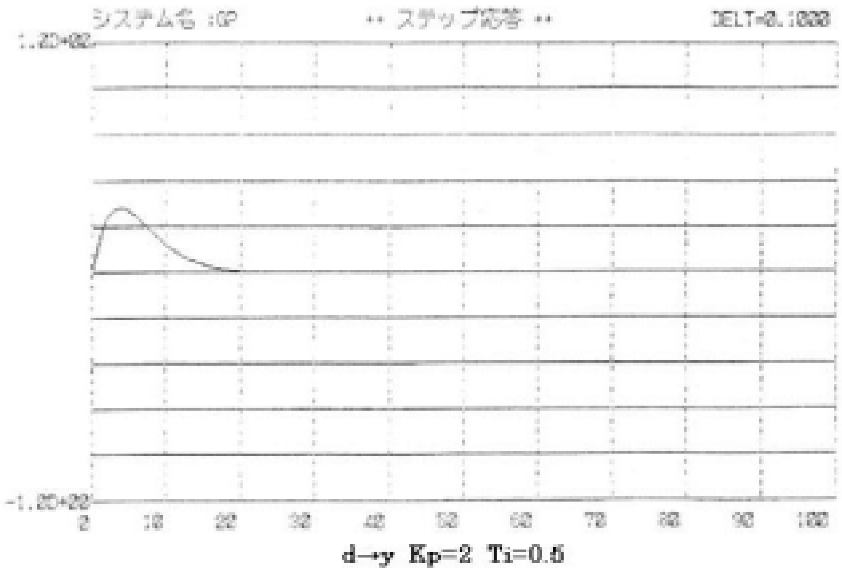

図 19　外乱 $d(t)$ に対する制御量 $y(t)$

（5） No.５；Kp=２，Ti=３

図 20，21 にシミュレーション結果を示す．Kp と Ti のこの組み合わせは領域①であり，この領域のグラフはオーバーシュートすることなく一定時間後には一定値に収束する．No.2 にくらべて，目標値および外乱の速応性が高くなっているが，外乱は同時に $y_{\max}$ が大きくなり減衰性が低下していることが分かる．

$v \rightarrow y$ ；$T_r = 1.6$，$T_d = 0.16$，$T_s = 4.0$

$d \rightarrow y$ ；$y_{\max} = 3.5$，$T_p = 0.67$，$T_s{}' =$ 大

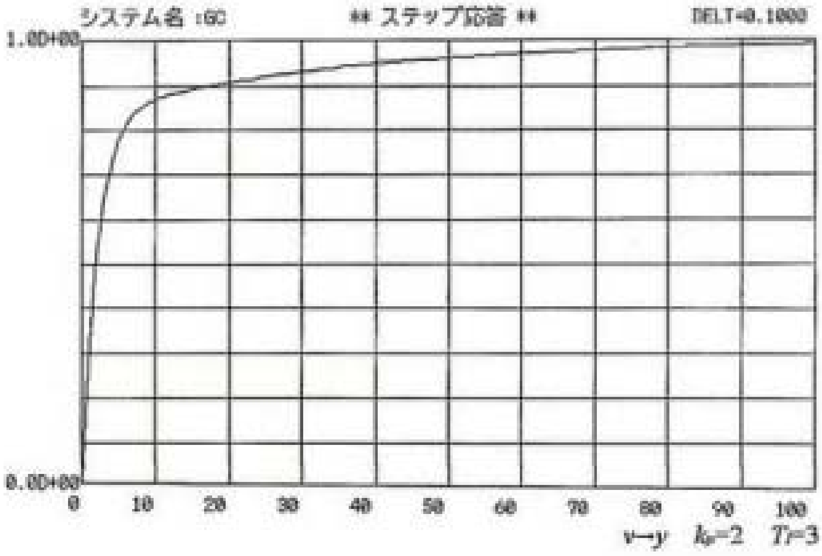

図 20　目標値 $v(t)$ に対する制御量 $y(t)$

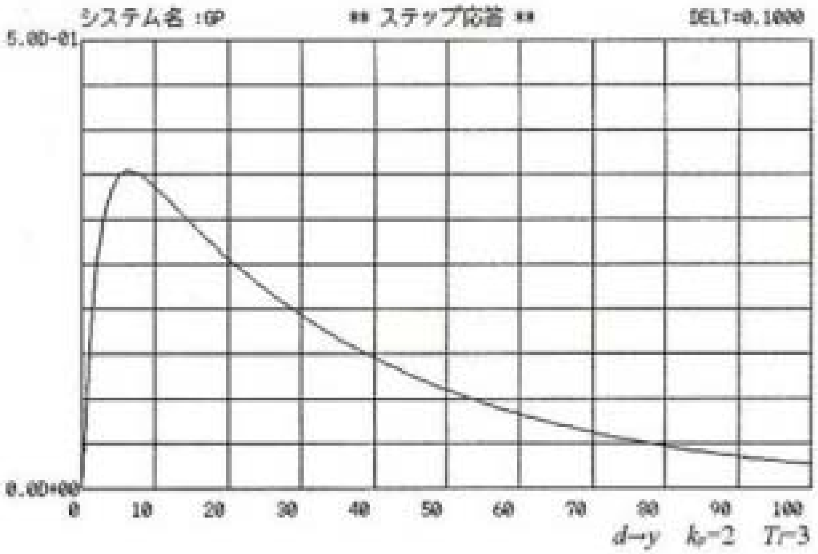

図 21　外乱 $d(t)$ に対する制御量 $y(t)$

（6） No. 6 ；Kp= 2， Ti=∞

図 22, 23 にシミュレーション結果を示す. Kp と Ti のこの組み合わせは領域①であるが, Ti の値が大きいため，前節でも述べたように定常偏差は 0 にならず，応答にオフセットを持つことになる. 図を見ても分かるよう, 一定時間後には目標値に対する制御量はｙ＝0.8, 外乱に対する制御量への影響はｙ＝0.4 であり，これは４．１節で計算した値と一致している．No.3 にくらべて速応性が高くなっている.

$$v \to y \;；T_r = 0.46，\; T_d = 0.15，\; T_s = 0.62$$

$$d \to y \;；T_r = 0.46，\; T_d = 0.12，\; T_s = 0.77$$

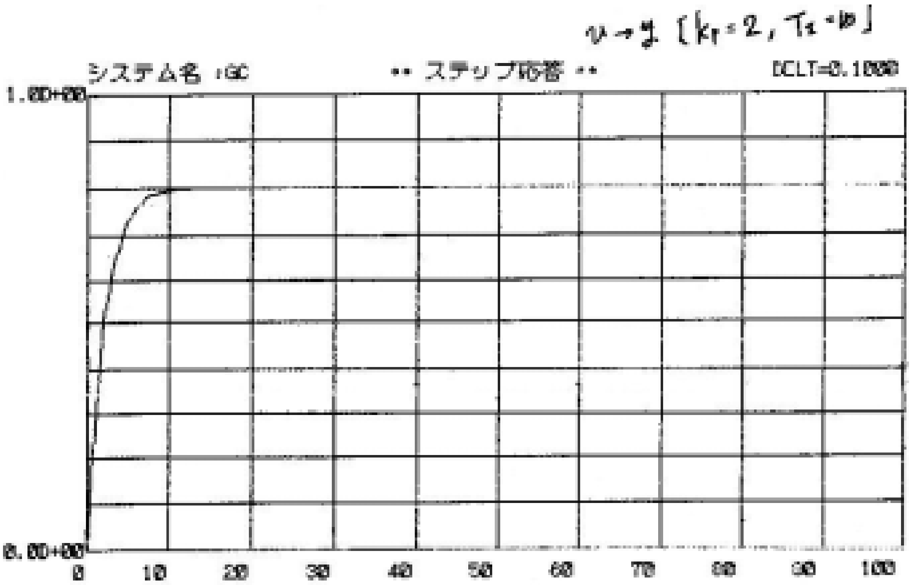

図 22　目標値 $v(t)$ に対する制御量 $y(t)$

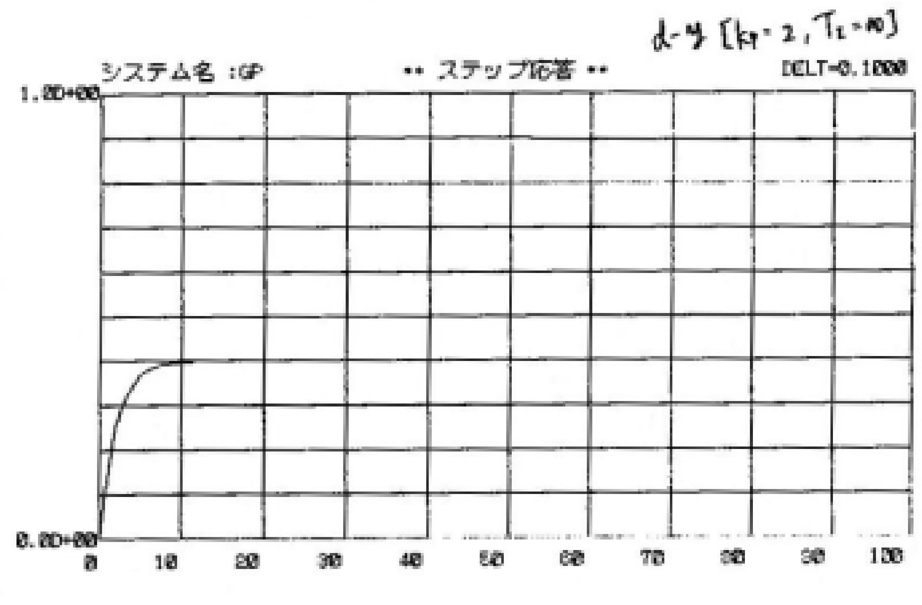

図 23　外乱 $d(t)$ に対する制御量 $y(t)$

（７） **No.７；Kp=－0.5，Ti=－0.5**

図 24，25 にシミュレーション結果を示す．Kp と Ti のこの組み合わせは領域⑥であり，３．２節で述べたように，Ti＜0 かつ Kp＝－0.5 のとき制御系は安定限界となり，その応答は正弦波となる．

$v \to y$ ；振幅；1.2，周期；4.4，中心；ｙ＝1.0
$d \to y$ ；振幅；1.5，周期；4.4，中心；ｙ＝0

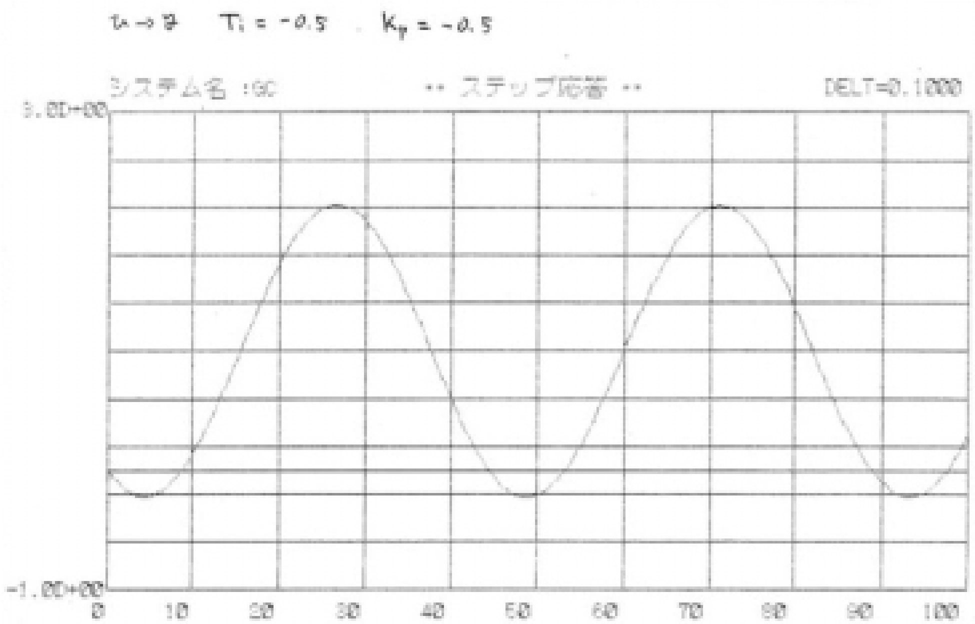

図 24　目標値 $v(t)$ に対する制御量 $y(t)$

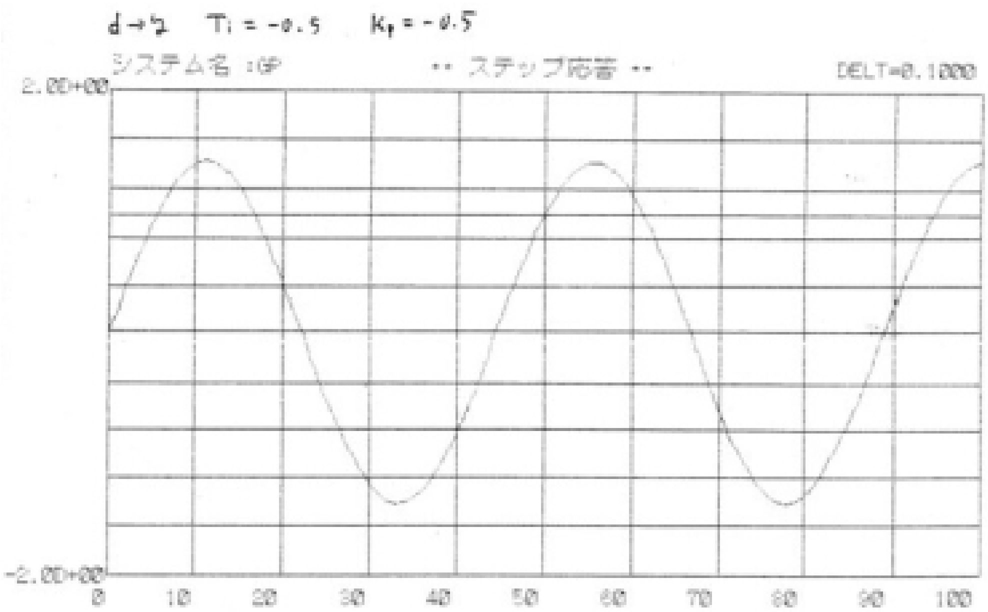

図 25　外乱 $d(t)$ に対する制御量 $y(t)$

（8） **No.８；Kp=－0.5，Ti=－３**

図 26，27 にシミュレーション結果を示す．Kp と Ti のこの組み合わせは領域⑥であり，No.７同様に，制御系は安定限界となり，その応答は正弦波となる．

No.7 と比較すると，振幅は大きくなり，周期も若干長くなっている．したがって，No.7 よりも減衰性および速応性が低くなりうる傾向にあるといえる．

$v \to y$ ；振幅；2.0，周期；5.4，中心；ｙ＝1.0

$d \to y$ ；振幅；3.6，周期；5.4，中心；ｙ＝0

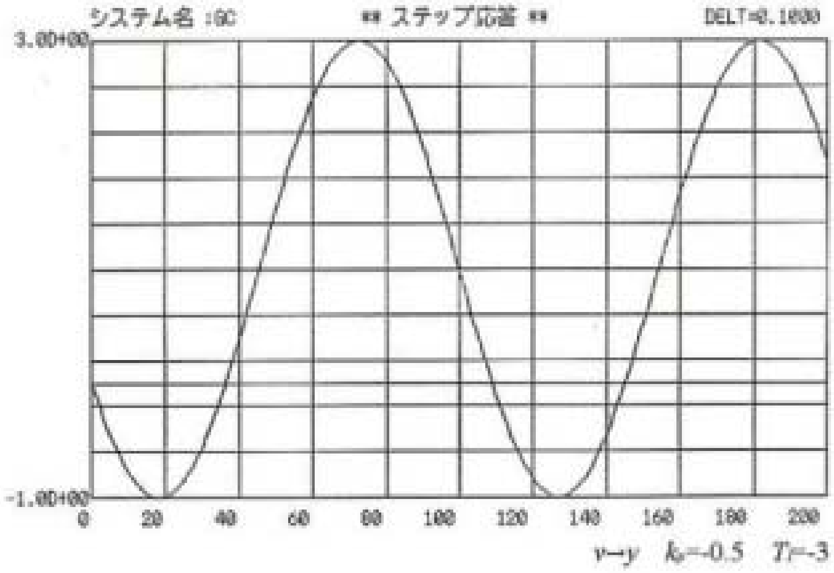

図 26　目標値 $v(t)$ に対する制御量 $y(t)$

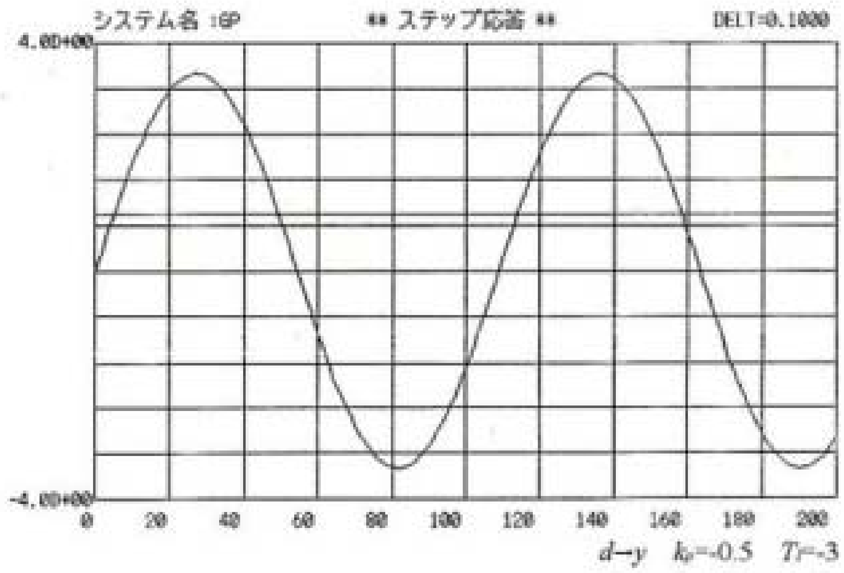

図 27　外乱 $d(t)$ に対する制御量 $y(t)$

（9） No.９；Kp=－0.3，Ti=－３

図 28，29 にシミュレーション結果を示す．Kp と Ti のこの組み合わせは領域⑤であり，特性根に虚数を含むため，応答の結果にも振動の傾向が見られ，オーバーシュートも見られる．グラフは No.1 や No.4 に比べると，むしろ No.7 および No.8 に近く，目標値は制御開始直後に負の値を示し，全体として正弦振動が減衰するようなグラフとなっている．

$$v \to y\ ;\ T_r = 2.3,\ T_d = 4.9,\ A_m = 129\%,\ T_p = 9.2,\ T_s = 190$$

$$d \to y\ ;\ y_{\max} = 2.6,\ T_p = 2.9,\ T_s' = 190$$

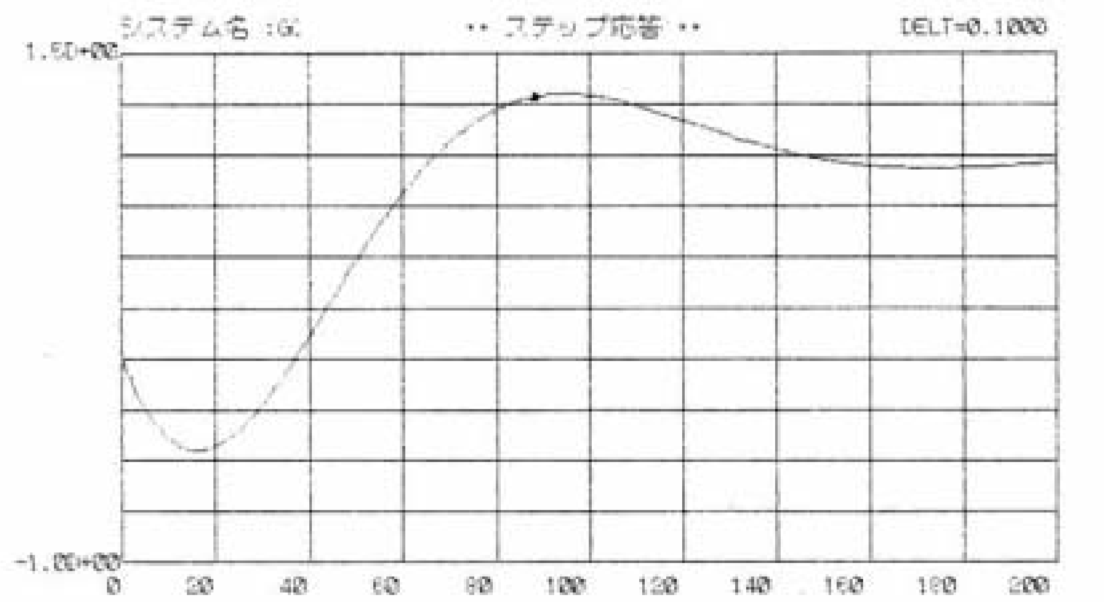

図 28　目標値 $v(t)$ に対する制御量 $y(t)$

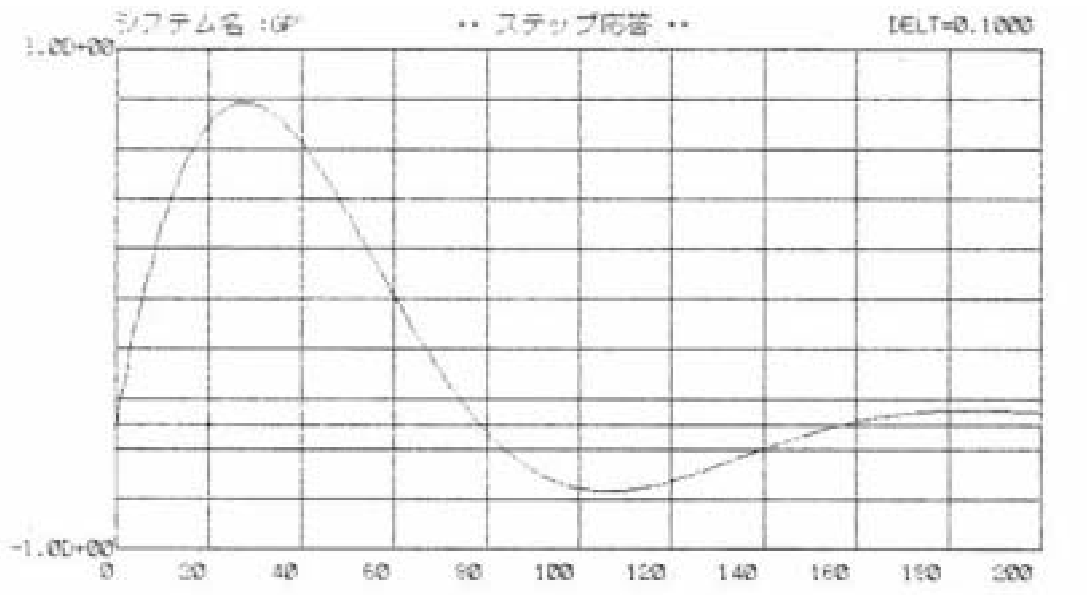

図 29　外乱 $d(t)$ に対する制御量 $y(t)$

４．３ まとめ

以上のことより，得られたことをまとめる．

第１象限において，目標値の制御量への影響は Kp が大きくなると，立ち上がり時間T_r，遅れ時間T_d，行き過ぎ時間T_p，整定時間T_sなどの速応性にかかわるパラメータが小さくなる．ただし，減衰性は Kp に依存しない．Ti が大きくなると制御開始直後は速応性の高い応答を見せるが，制御量の一定値（ｙ＝1）に近づくと速応性が低くなる．そのため，遅れ時間T_dの変化は少ないが，立ち上がり時間T_rおよび整定時間T_sなどは極端に長くなる．また，Ti を非常に大きな値にすると，偏差が大きくなり，制御量が目的の量から大きくはずれてしまう．Ti の大きさを変えずにオフセットを小さくするには，同時に Kp も大きくすえば偏差は小さくなる．

一方，外乱が制御量に与える影響は，Kp が大きくなるとすべてのパラメータが小さくなるため，速応性および減衰性が高くなり，外乱の及ぼす影響が小さくなる．また，Ti が大きくなると，$y_{\max}$，T_p，T_sが大きくなり速応性および減衰性が低下し，特に$y_{\max}$の値が大きくなることから制御開始直後の外乱が制御に及ぼす影響は大きくなるといえる．

第３象限では，領域⑥において Ti が小さくなると振幅は大きくなり，周期も若干長くなったため，この付近の領域⑤は Ti が小さくなると減衰性および速応性が低くなると予想できる．また，No.8 と No.9 の比較より，Kp が大きくなると減衰性は大きくなると予想できる．領域④については，特性根に虚数を含まないため振動はせず，かつ定常偏差は 0 なので目標値は１に外乱は 0 に収束すると思われる．

表2 v→y 過渡特性

No	Kp	Ti	Tr	Td	Am [%]	Tp	Ts	領域
1	0.5	0.5	1.1	0.56	106	2.4	3.1	②
2	0.5	3	9.0	0.33			12	①
3	0.5	∞	1.2	0.38			1.7	①
4	2	0.5	0.31	0.13	108	0.88	1.3	②
5	2	3	1.6	0.16			4.0	①
6	2	∞	0.46	0.15			0.62	①
9	-0.3	-3	2.3	4.9	129	9.2	19	⑤

表3 d→y 過渡特性

No	Kp	Ti	Tr	Td	y_max	Tp	Ts	領域
1	0.5	0.5			0.64	0.75	2.9	②
2	0.5	3			0.85	1.4	大	①
3	0.5	∞	1.2	0.38			1.5	①
4	2	0.5			0.28	0.38	1.7	②
5	2	3			3.5	0.67	大	①
6	2	∞	0.46	0.12			0.77	①
9	-0.3	-3			2.6	2.9	19	⑤

５． 検討

≪フィードバック制御を行わない場合≫

今回の測定はフィードバック制御系の特性解析であるが, フィードバックを行わない場合に外乱が制御系に加わった場合の制御量の応答特性を検討する.

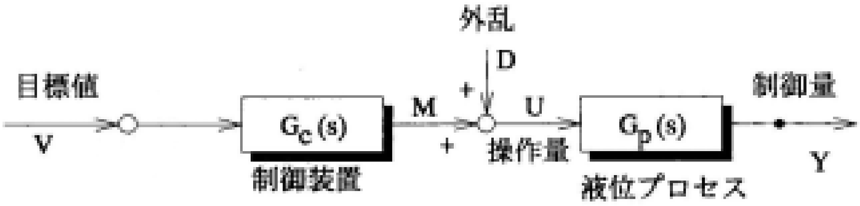

図 30　フィードバックの無い制御系

図 30 のような制御系で，伝達関数 Gc および Gp に２章で用いた,

$$G_c(s) = k_p\left(1 + \frac{1}{T_i s}\right) = \frac{k_p T_i s + k_p}{T_i s}$$

$$G_p(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{2}{s+1}$$

を用い，入力は目標値・外乱ともにステップ入力とすると，制御量 Y は,

$$Y(s) = \{G_c(s) \cdot V(s) + D(s)\} \cdot G_p(s)$$

$$= \left\{\frac{k_p T_i s + k_p}{T_i s} \cdot \frac{1}{s} + \frac{1}{s}\right\} \cdot \frac{2}{s+1}$$

$$= \frac{2\{T_i s(k_p + 1) + k_p\}}{T_i s^2 (s+1)}$$

最終地定理より， $\lim_{t\to\infty} y(t)$ の値は,

$$\lim_{t\to\infty} y(t) = \lim_{s\to 0} sY(s) = \lim_{s\to 0} \frac{2\{T_I s(k_p + 1) + k_p\}}{T_i s(s+1)} = \infty$$

であり，制御量を制御することは不可能である.

これは, 開ループ制御系においては, 外乱による入力に対して，その影響を抑える手段が無いためである.

6． 結言

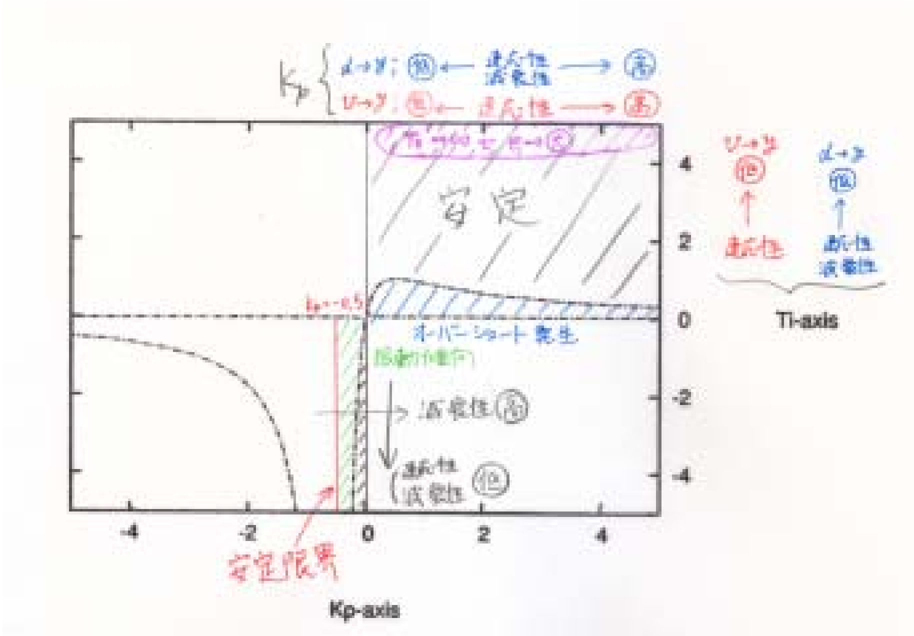

図 31　まとめ

図 31 に示す斜線部分が安定領域であり，斜線のない領域は不安定となる．
具体的には判別式 H=0 となる曲線,

$$H = T_I^{\,2}\left(2k_p + 1\right)^2 - 8k_p T_I = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad T_I = \frac{8k_p}{4k_p^{\,2} + 4k_p + 1} \qquad \left(T_I \neq 0\right)$$

と，$T_I = 0$ との間の領域である．

- ◆ 領域①；$k_p > 0$，$T_I > \dfrac{8k_p}{4k_p^{\,2} + 4k_p + 1}$ で目標値はオーバーシュートを示さない．
- ◆ 領域②；$k_p > 0$，$0 < T_I < \dfrac{8k_p}{4k_p^{\,2} + 4k_p + 1}$ で目標値はオーバーシュートを示す．
- ◆ 領域④；$-0.5 < k_p < 0$，$T_I < \dfrac{8k_p}{4k_p^{\,2} + 4k_p + 1}$ で制御系は安定．
- ◆ 領域⑤；$-0.5 < k_p < 0$，$\dfrac{8k_p}{4k_p^{\,2} + 4k_p + 1} < T_I < 0$ で制御量は振動しながら収束する．
- ◆ 領域⑥；$k_p = -0.5$，$T_I < 0$ で安定限界となり，制御量は正弦波となる．

また，Kp を大きくすると，目標値に対する制御量の速応性が高くなり，外乱による制御量への影響は速応性および減衰性が高くなり，外乱の及ぼす影響が小さくなる．Ti が大きくなると目標値に対する制御量は制御開始直後は速応性の高い応答を見せるが, 制御量の一定値（y＝1）に近づくと速応性が低くなる．そのため，遅れ時間 T_d の変化は少ないが，立ち上がり時間 T_r および整定時間 T_s などは極端に長くなる．外乱による影響も，速応性は低くなり，同時に $y_{\max}$ の値が大きくなることから制御開始直後の外乱が制御に及ぼす影響は大きくなる．