１．　実験の意義・目的

日常の中で振動現象を探すことは困難なことではない．回転運動する機械や風に吹かれる翼・建造物など不利益な振動もあれば，携帯電話や土木機械，ブランコ，電子レンジ，粒子状物質の除去や運搬など積極的に振動を利用する製品も存在する．

私の身近な話題としては，レーシングカートのエンジンまわりのボルト・ナットがエンジンからの振動により，よく脱落または破断することがある．興味深いのは，サーキットによりボルトの落ちやすさが異なり，脱落するボルトも共通の方向を向いたボルトのみが脱落するなど現象に法則性らしきものが見られることである．振動学を十分に履修していない現状では，これらの現象の説明を行なうことができないのは大変残念である．その他，加速時に車速が上がると，あるエンジンの回転域（速度計が無いのでレース界ではエンジン回転数で車速を判断する）で決まってフェアリング類が大きく振動することや，タイヤのホイールバランスが悪いときの振動など，単純な構造・単純な運動をするレーシングカートでは多くの物理運動を経験することができる．

これらのボルトやナットの脱落，物体の振動で共通しているのは「共振」であり，この共振現象により時には機械や構造物の故障や破壊にもつながることがある．したがって，振動を抑制するにしても利用するにしても，物体の振動現象について理解することは重要であり，特に機械科の我々は製品の設計に携わる仕事に就くことも多いので，どの分野を専攻するにしても振動学を学ぶことは必須である．

しかしながら，機械や構造物の振動に関する性質を理解することが重要と言いつつも，振動現象のすべてを正確に把握することは困難であり，製品の試作を行なった後に振動テストを実施することが一般に行なわれている．近年ではそのテスト方法もコンピュータ支援システムを用いたモーダルアナライザを用いることが多く，その基礎理論は「モード解析」である．

したがって今回の実験では，単純梁を用いて振動モードの解析を行い，モード解析の原理および手法を理解することが目的である．

２．　基礎事項

２．１　１自由度系の振動

（１）　自由振動

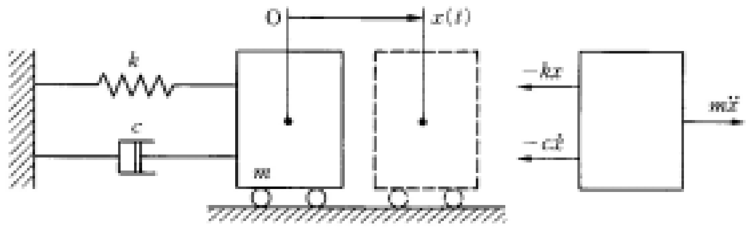


図１　１自由度系の自由振動モデル

自由度系とは，振動系の運動状態を表すのに必要な変数の数を表すものである．

まず，１自由度系を考えるにあたって図１のように，バネ定数ｋ，減衰係数ｃのダンパおよび質量ｍからなる系を考える．質量ｍは x 方向にのみ動きうるとすれば，この系の時刻ｔにおける状態は一つの変位 $x(t)$ のみで決定されるので，たしかに１自由度系である．

この振動系の運動方程式は，

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = 0 \qquad ———（１）$$

ここで,

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}}\ \ \text{[rad/s]},\qquad f_n = \frac{\omega_n}{2\pi}\ \ \text{[Hz]},\qquad T_n = \frac{1}{f_n}\ \ \text{[s]},\qquad \zeta = \frac{c}{2\sqrt{mk}}$$

とすると，式(1)は

$$(1) \Leftrightarrow \qquad \ddot{x} + 2\zeta\omega_n\dot{x} + {\omega_n}^2 x = 0 \qquad ―――（２）$$

となり，ω_n；固有角振動数，f_n；固有振動数，T_n；固有周期，ζ；減衰比率という.

式(2)を常微分方程式の解法にしたがって解くと,

$$x = A\exp(\lambda_1 t) + B\exp(\lambda_2 t) \qquad ―――（３）$$

ただし，A,B は積分定数，λは特性根であり,

$$\lambda = -\zeta\omega_n \pm \sqrt{\zeta^2{\omega_n}^2 - {\omega_n}^2} = -\omega_n\left(\zeta \pm \sqrt{\zeta^2 - 1}\right) \qquad ―――（４）$$

である．式(4)を見れば分かるように，$\zeta^2 - 1$の符号により式(3)の振動状態は異なる．$\zeta^2 - 1 \leq 0$では根が虚数となるので振動を起こし，ζ＝0 のときは調和振動，$\zeta^2 - 1 < 0$のとき不足減衰振動となる．一方，$\zeta^2 - 1 > 0$では振動挙動を示さず過減衰と呼ばれる.

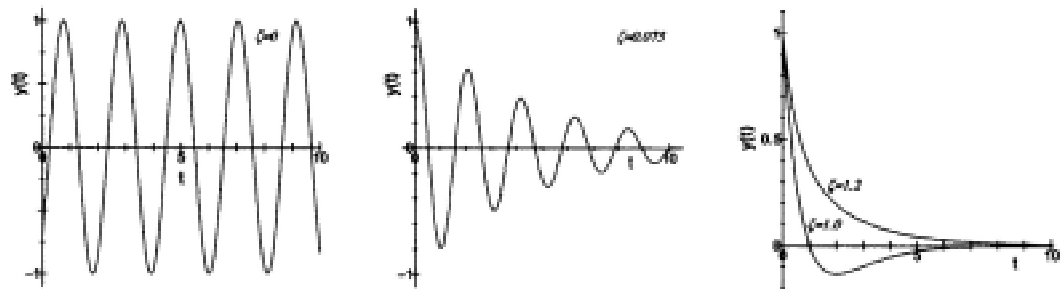


図２　(a)調和振動，(b)不足減衰振動，(c)過減衰

（２） 強制振動

次に，図１に示す振動系に外力ｆを加えた，図３の系を考える.

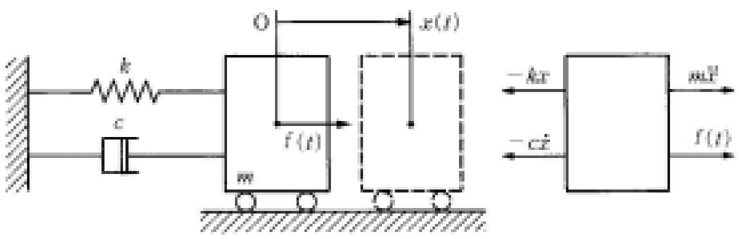


図３　１自由度系の強制振動モデル

図３の運動方程式は,

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = f(t)$$

$$\Leftrightarrow \quad \ddot{x} + 2\zeta\omega_n\dot{x} + {\omega_n}^2 x = \frac{1}{m}f(t) \qquad ―――（５）$$

この式(5)は，非斉次線形常微分方程式であるので，その解は式(2)の解である一般解（斉次解）と特殊解（強制振動解）の和の形となる.

安定な振動系（$\zeta > 0$）では，斉次項は$t \to \infty$において 0 となるので，振動直後の過渡特性に着目する場合を除き，強制振動解のみを取扱う場合が多い.

例えば，外力が調和励振であるとすると，

$$f(t) = F\exp(j\omega t) \qquad ―――（６）$$

ｊは単位虚数，ωは励振角振動数を示す．

この時の特殊解を， $x(t) = Xe^{j\omega t}$ ―――（７） とすると，

$\dot{x} = j\omega \cdot Xe^{j\omega t}$， $\ddot{x} = -\omega^2 \cdot Xe^{j\omega t}$ であるので，

$$(5) \Leftrightarrow \quad \left(-\omega^2 + 2\zeta\omega_n \cdot j\omega + {\omega_n}^2\right) \cdot Xe^{j\omega t} = \frac{F}{m} e^{j\omega t}$$

$$\Leftrightarrow \quad \left\{ -\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2 + 2j\zeta\frac{\omega}{\omega_n} + 1 \right\} \cdot X = \frac{F}{m} \cdot \frac{1}{{\omega_n}^2} = \frac{F}{k} \qquad ―――（８）$$

ここで， F/k は系に静加重 F を加えたときの変位に等しい． $X_{st} \equiv F/k$， $\beta \equiv \omega/\omega_n$ として式(8)を整理すると，

$$(8) \Leftrightarrow \quad \frac{X}{X_{st}} = \frac{1}{1 - \beta^2 + 2j\zeta\beta} \qquad ―――（９）$$

式(9)から明らかなように，仮定した減衰振動の解(7)の係数 X は複素数となる．

式(7)にオイラーの公式： $e^{j\theta} = \cos\theta + j\sin\theta$ を用いると式(7)は次式のように直交座標形式で表せる．

$$x(t) = X\cos\omega t + jX\sin\omega t \qquad ―――（10）$$

また， $x(t)$ が，

$$x(t) = \xi(\omega t) + \eta(\omega t)$$

のように直交座標形式で与えられている時には（図４），ゲイン，位相は

ゲイン： $|x(t)| = \sqrt{\xi(\omega)^2 + \eta(\omega)^2}$

位相： $\varphi = \angle x(t) = Tan^{-1}\dfrac{\eta(\omega)}{\xi(\omega)}$

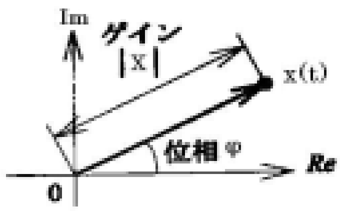


図４　変位振幅と位相

のようになり，偏角 $\angle x(t)$ は位相に等しいという関係がある．

したがって，

$$(9) \Leftrightarrow \quad \left|\frac{X}{X_{st}}\right| = \frac{|X|}{X_{st}} = \frac{1}{\sqrt{\left(1-\beta^2\right)^2 + \left(2j\zeta\beta\right)^2}} \quad , \qquad \varphi = Tan^{-1}\left(-\frac{2\zeta\beta}{1-\beta^2}\right) \quad \text{より}$$

$$\therefore \quad x(t) = \frac{F/k}{\sqrt{\left(1-\beta^2\right)^2 + \left(2\zeta\beta\right)^2}} \exp\left[j(\omega t + \varphi)\right] \qquad ―――（11）$$

式(11)で示される定常振動の無次元振幅 X/X_{st} および励振力と応答変位の位相差 φ を，横軸に無次元角振動数βをとり減衰比をパラメータとして図示したものを図５,図６に示す．

$|X|/X_{st}$ は振幅倍率と呼ばれ，強制振動において重要な量である．図５の減衰比率ζをパラメータとする周波数応答曲線において，振動数比β＝1 の付近で振幅倍率が急増していること，および図６において位相が反転していることが分かる．この現象を共振といい，特に減衰のない場合（ζ＝0）にはβ＝1 で振幅が無限大となる．しかし，減衰が大きくなるにつれて，それらの変化は緩やかとなる．また，振動数比が高くなると質点の応答が遅れるので，振幅倍率は小さくなる．一方，共振点β＝1 の近くで位相遅れ角の変化が激しく，β＝1 では減衰比率にかかわりなく位相はつねに 90°遅れる．

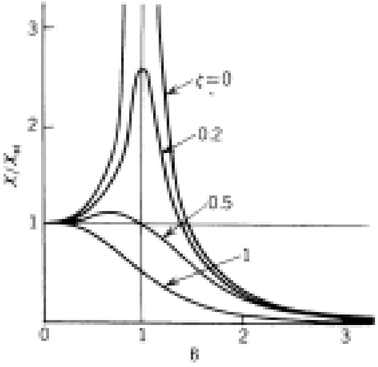


図５　１自由度系の強制振動による振幅[2)]

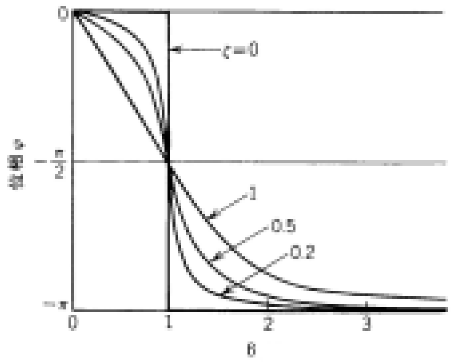


図６　１自由度系の強制振動による位相差[2)]

（３） 伝達関数

質量mに任意の励振力 $f(t)$が作用する場合（式(5)）において,

$t \le 0$ において，　$f = 0$，$\dot{x} = 0$，$\ddot{x} = 0$

としてフーリエ変換を行なう.

フーリエ変換とは関数 $f(t)$が区分的に滑らかな連続関数で次の条件

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left| f(t) \right| \cdot dt < \infty$$

を満たすとき,

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cdot e^{-j\omega t} dt \qquad ———(12)$$

で定義される関数$F(\omega)$を指す． $t \le 0$ において $f(t) = 0$ ならば次式となる.

$$F(\omega) = \int_{0}^{\infty} f(t) \cdot e^{-j\omega t} dt \qquad ———(13)$$

ただし, 振動系の入力でよく用いられる単位ステップ関数や正弦波関数などは式(12)の条件を満足しないのでフーリエ変換は求まらない. このような場合には収束因子e^{-ct}を掛けて,

$$\int_{0}^{\infty} \left| f(t) \cdot \mathrm{e}^{-\mathrm{ct}} \right| \cdot dt < \infty$$

が成り立つようにすれば $f(t) \cdot e^{-ct}$ のフーリエ変換は次式のように求められる.

$$F(c + j\omega) = \int_{0}^{\infty} \left[f(t) \cdot e^{-ct} \right] \cdot e^{-j\omega t} dt = \int_{0}^{\infty} f(t) \cdot e^{-(c+j\omega)t} dt$$

上式で $s = c + j\omega$ とおけば,

$$F(s) = \int_{0}^{\infty} f(t) \cdot e^{-st} dt = L\left[f(t) \right] \qquad \text{（L はラプラス変換）} \qquad ———(14)$$

となり，この式は関数 $f(t)$の複素関数$F(s)$のラプラス変換の式である.

このように$t \le 0$で $f(t) = 0$となる関数についての条件を満たす実数ｃが存在すればラプラス変換が可能であり，$\exp(t^2)$などの特別なものを除けば振動系で扱う関数はほとんどラプラス変換可能であるといえる.

したがって，式(5)$\Leftrightarrow m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = f(t)$ においてラプラス変換を行なうと,

$L[x] = X$，　$L[\dot{x}] = sX - x(0) = sX$，　$L[\ddot{x}] = sL[\dot{x}] - \dot{x}(t) = s^2 X - s \cdot x(0) - \dot{x}(0) = s^2 X$

$L[f(t)] = F$

であるので式(5)は次式のように変換される．

$$(5) \Leftrightarrow \left(m \cdot s^2 + c \cdot s + k\right)X = F$$

したがって，伝達関数 G は,

$$G(s) = \frac{出力}{入力} = \frac{X}{F} = \frac{1}{m} \cdot \frac{1}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + {\omega_n}^2}$$

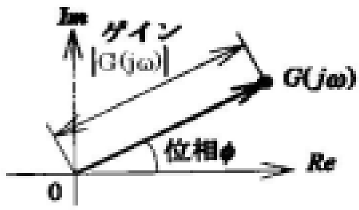
伝達関数 G(s)において s を jω に置換した関数$G(j\omega)$；周波数伝達関数は,

$$G(j\omega) = \frac{1}{m \cdot {\omega_n}^2} \cdot \frac{1}{-(\omega/\omega_n)^2 + 2j\zeta\,\omega/\omega_n + 1} = \frac{1/k}{1 - \beta^2 + 2j\zeta\beta} \qquad ———（15）$$

式(15)は複素数であり，先ほど同様にゲインと位相を求めると,

ゲイン： $|G(j\omega)| = \dfrac{1/k}{\sqrt{\left(1-\beta^2\right)^2 + \left(2j\zeta\beta\right)^2}}$

位相： $\varphi = \angle G(j\omega) = Tan^{-1}\left(-\dfrac{2\zeta\beta}{1-\beta^2}\right)$



２．２ 多自由度系

前節では最も簡単な１自由度系における振動の変位式および伝達関数を求めたが, 実際の構造物の振動現象は, 振動系の運動状態を表すのに必要な変数の数は複数におよび, 振動解が複数存在することは共振点が複数存在することを意味する．

いま，多自由度系（自由度 N）の不減衰自由振動を考える．

前節同様にニュートンの第二法則より，振動系の運動方程式は

$$[M]\{\ddot{x}\} + [K]\{x\} = \{0\} \qquad （不減衰より [C] = 0） \qquad ———（16）$$

ここで，$[M],[K]$は質量行列，剛性行列であり，N 自由度系であれば N×N の正方対称行列である．

すべての自由度が同位相で振動しているとすると,

$$\{x\} = \{X\}\exp(j\omega t) \qquad ———（17）$$

であるので，$L[\ddot{x}] = s^2 X = -\omega^2 X$ （$s = j\omega$）より式(16)は,

$$\left(-\omega^2[M] + [K]\right)\{X\} = 0 \qquad ———（18）$$

上式において$\{X\}$が零でない解を持つためには,

$$\left|-\omega^2[M] + [K]\right| = 0 \qquad ———（19）$$

が必要であり，この式(19)が特性方程式となる．

式(19)はω^2に関する N 次方程式であるがこれを解くと N 個の根を得る．この N 個の根（ω_i ；$i = 1,2,\cdots,N$ とおく）が系の固有振動数である．

また多自由度系では前節のように, 式(18)における N 個の未知数$X_1, X_2, \cdots, X_N$の絶対値を決めることはできず, 各未知数の比が求まるのみである. つまり, 任意の固有振動数ω_iで振動するとき,

$$\left(-{\omega_i}^2[M] + [K]\right)\{X\} = 0 \qquad ———（20）$$

を満たす$\{X\}_i$の，各成分間の比$X_1 : X_2 : X_3 : \cdots : X_N$が決まる．固有振動数$\omega_1, \omega_2, \cdots, \omega_N$

に対する$\{X\}$はＮ組あるので各成分間の比の組もＮ通り存在する．これらの振幅比は振動系の固有の型（モード）を表すので，これらを振動の固有モードと呼ぶ．以後，固有モードは$\{\phi\}_i$で示す．

次に，固有モードの直交性については，式(18)はすべてのω_iと$\{\phi\}_i$について成立するので，ｒ次とℓ次の固有モードに関して

$$\omega_r^{\,2}[M]\{\phi\}_r = [K]\{\phi\}_r, \quad \omega_\ell^{\,2}[M]\{\phi\}_\ell = [K]\{\phi\}_\ell \qquad ――― (21)$$

これらのうち右辺の先頭に$\{\phi\}_r^{\,T}$を乗じ，また左辺を転置したものに後から$\{\phi\}_\ell$を乗じれば，$[M]$も$[K]$も対称行列であるから，

$$\omega_r^{\,2}\{\phi\}_r^{\,T}[M]\{\phi\}_\ell = \{\phi\}_r^{\,T}[K]\{\phi\}_\ell, \quad \omega_\ell^{\,2}\{\phi\}_r^{\,T}[M]\{\phi\}_\ell = \{\phi\}_r^{\,T}[K]\{\phi\}_\ell \qquad ――― (22)$$

$\omega_r \neq \omega_\ell$で式(22)の両式がともに成り立つには

$$\{\phi\}_r^{\,T}[M]\{\phi\}_\ell = 0, \quad \{\phi\}_r^{\,T}[K]\{\phi\}_\ell = 0 \qquad (r \neq \ell) \qquad ――― (23)$$

式(23)は，固有モードが$[M]$と$[K]$の両方に関して直交していることを示す．

一方，

$$\{\phi\}_r^{\,T}[M]\{\phi\}_r = m_r, \quad \{\phi\}_r^{\,T}[K]\{\phi\}_r = k_r \qquad (r = 1 \sim N) \qquad ――― (24)$$

とおくと，式(24)と式(21)より

$$\omega_r^{\,2} m_r = k_r \qquad ――― (25)$$

m_rとk_rをそれぞれｒ次のモード質量，ｒ次のモード剛性という．固有モード$\{\phi\}_r$は振幅の比であるので，大きさは自由に決められる．特に$m_r = 1$となるように大きさを決めた固有モードを正規モードと呼ぶ．

次に，強制振動について考える．

ところで，実際の空間における物理座標に対して，固有モードにより形成される一般座標をモード座標または主座標という．正規モードを用いたモード座標を正規座標という．このように定義したモード座標を用いて，運動方程式を座標変換する．式(23)に示したように，固有モードには直交性があるので，Ｎ自由度における任意の$\{x\}$は，次のように表現できる．

$$\{x\} = \sum_{i=1}^{N} \xi_i \{\phi\}_i \qquad ――― (26)$$

この式を運動方程式に代入し，$\{\phi\}_r^{\,T}$を乗じれば，

$$\sum_{i=1}^{N}\left(\{\phi\}_r^{\,T}[M]\{\phi\}_i \ddot{\xi}_i + \{\phi\}_r^{\,T}[K]\{\phi\}_i \xi_i\right) = \{\phi\}_r^{\,T}\{f\} \qquad ――― (27)$$

いま，外力を$\{f\} = \{F\}e^{j\omega t}$，応答を$\{x\} = \{X\}e^{j\omega t}$とすると，

$$\{X\} = L[\{x\}] = L\left[\sum_{i=1}^{N} \xi_i \{\phi\}_i\right] = \sum_{i=1}^{N} P_i \{\phi\}_i \qquad ――― (28)$$

$$\ddot{\xi}_i = -\omega^2 P_i e^{j\omega t}, \quad \xi_i = P_i e^{j\omega t} \qquad ――― (29)$$

式(28)を式(27)に代入すると，

$$P_i = \{\phi_i\}^T \{F\} / \left(-\omega^2 m_i + k_i\right) \qquad ――― (30)$$

したがって，点 a に励振力F_aを与えた時の点 b の応答をX_bとすると伝達関数は，

$$G = \frac{X_b}{F_a} = \sum_{i=1}^{N} \frac{1/K_i}{1 - \beta_i^{\,2} + 2j\xi_i\omega_i}, \quad \beta_i = \frac{\omega}{\omega_i} \qquad ――― (31)$$

２．３ 弾性梁における曲げ振動

（1） 運動方程式

棒および梁に曲げモーメントが作用するとき，その棒・梁は曲げられる．作用する曲げモーメントが時間と共に変化する場合には振動が発生し，このような振動を梁の横振動，または梁の曲げ振動と呼ぶ.

梁の曲げ振動に関する運動方程式を解くには,梁の断面に作用する力の釣り合い方程式と,梁のたわみー曲げモーメントの関係式を用いる.

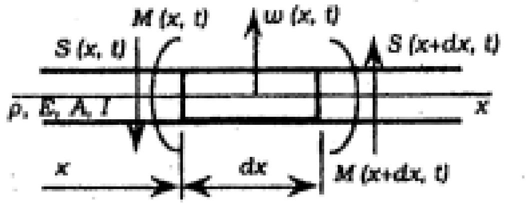


図７　弾性梁の曲げ変位

今，密度ρ，断面積A，ヤング率E，断面二次モーメントIとして梁の微小区間 dx の両端に作用する断面力と鉛直方向の慣性力の釣り合いを考える.（図７参照）

図７のようにせん断力を$S(x,t)$，曲げモーメントを$M(x,t)$，微小変位を$w(x,t)$とすると，断面間に作用する鉛直方向の力の釣り合いとモーメントの釣り合いより次式が求まる.

鉛直方向の慣性力；$-\rho Adx\cdot\dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2}$

鉛直方向の力の釣り合い；$\rho Adx\dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2}=S(x+dx,t)-S(x,t)$ ―――（32）

モーメントの釣り合い；$S(x,t)=-\dfrac{\partial}{\partial x}M(x,t)$ ―――（33）

ここで，式(32)について，右辺をテイラー展開すると

$$S(x+dx,t)-S(x,t)=S(x,t)+\frac{\partial S(x,t)}{\partial x}dx+\frac{1}{2!}\frac{\partial^2 S(x,t)}{\partial x^2}dx^2+\cdots-S(x,t)\approx\frac{\partial S(x,t)}{\partial x}dx$$

とできるので,

$$(32)\Leftrightarrow\qquad \rho A\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}=\frac{\partial}{\partial x}S(x,t)\qquad ―――（34）$$

また，梁のモーメントは,

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}w(x,t)=\frac{1}{EI}M(x,t)\qquad ―――（35）$$

であるので，式(34)に式(33)，式(35)を代入して S と M を消去すると,

$$\frac{\partial}{\partial x}\left\{-\frac{\partial}{\partial x}\left(EI\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)\right\}=\rho A\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}$$

$$\Leftrightarrow\qquad \rho A\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}+EI\frac{\partial^4 w}{\partial x^4}=0\qquad \text{（ただし，E,I＝const）}$$

$$\Leftrightarrow\qquad \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}+\alpha^4\frac{\partial^4 w}{\partial x^4}=0\qquad \left(\alpha=\sqrt[4]{\frac{EI}{\rho A}}\right)\qquad ―――（36）$$

この式(36)はオイラー・ベルヌーイの方程式と呼ばれるものである．このオイラー・ベルヌーイの式では,梁の断面は曲げ運動中も中立軸に直交した平面を持つと仮定してせん断変形を無視している.

≪参考≫　**Timoshenko 梁**

オイラー・ベルヌーイの式は，せん断力によって生じる梁の変形や断面の回転運動に伴う回転慣性の影響を無視している．しかし，実際の振動では断面要素は中立軸から傾いてせん断変形を生じ，しかも微小要素は中立軸に直交する軸のまわりの回転運動を行う．振動変位が大きくなったり周波数が高くなるとこのせん断変形の効果と回転慣性の効果が無視できない．

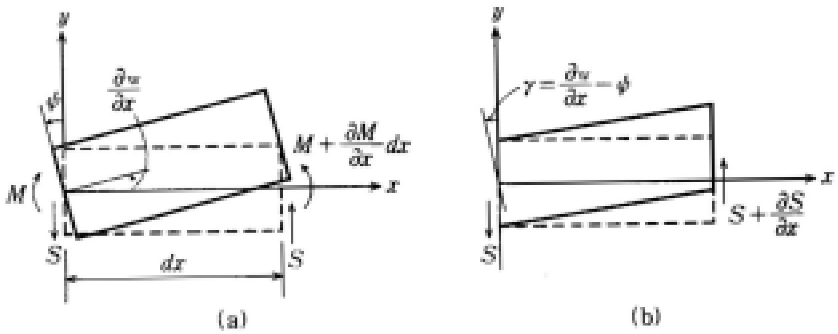


図８　せん断変形の影響

まず，せん断変形の影響を考える．

曲げ振動では図８(a)に示すように変位前後で軸線の傾き $\partial w/\partial x$（cf. 角度θが微小なとき，$\theta \approx \tan\theta$ ）と断面の傾きψが等しいと仮定している．しかし，図８(b)に示すようにせん断変形を仮定すると，曲げモーメントの次式となる．

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} = \frac{M}{EI} \qquad ———（37）$$

この $\partial\psi/\partial x$ は式(35)の $\partial^2 w/\partial x^2$ と同様に曲率を表している．

また，せん断角γは，図８(b)に示すように，断面について平均的に見れば，軸線の傾き $\partial w/\partial x$ と断面の傾きに等しい．

$$\gamma = \frac{\partial w}{\partial x} - \psi \qquad ———（38）$$

このせん断ひずみとせん断力 S の関係は，せん断弾性係数を G，断面係数を k とすると，

$$G\gamma = \frac{kS}{A} \qquad ———（39）$$

したがって，せん断変形の影響を考慮した運動方程式は，

$$(32) \Leftrightarrow \quad \rho A \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = \frac{\partial S}{\partial x}$$

$$\Leftrightarrow \quad \rho A \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{\partial M}{\partial x}\right) \qquad \because\ 式(33)を代入$$

$$\Leftrightarrow \quad \rho A \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left\{-\frac{\partial}{\partial x}\left(EI\frac{\partial \psi}{\partial x}\right)\right\} \qquad \because\ 式(37)を代入$$

$$\Leftrightarrow \quad \rho A \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left\{-\frac{\partial}{\partial x}\left[EI\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial w}{\partial x} - \gamma\right)\right]\right\} \qquad \because\ 式(38)を代入$$

$$\Leftrightarrow \quad \rho A \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left\{-\frac{\partial}{\partial x}\left[EI\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial w}{\partial x} - \frac{kS}{GA}\right)\right]\right\} \qquad \because\ 式(39)を代入$$

$$\Leftrightarrow \quad \rho A \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = -EI\left\{\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} - \frac{\partial^3}{\partial x^3}\left(\frac{kS}{GA}\right)\right\} \qquad ———（40）$$

ところで，上式(40)右辺の第２項は,

$$\frac{\partial^3}{\partial x^3}\left(\frac{kS}{GA}\right)=\frac{k}{GA}\cdot\frac{\partial^2}{\partial x^2}\cdot\frac{\partial S}{\partial x}=\frac{k\rho}{G}\cdot\frac{\partial^2}{\partial x^2}\cdot\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \qquad \because \quad \text{式(32)；} \frac{\partial S}{\partial x}=\rho A\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}$$

よって，せん断変形の影響を考慮した運動方程式は,

$$(40)\Leftrightarrow \qquad EI\frac{\partial^4 w}{\partial x^4}-\frac{k\rho EI}{G}\cdot\frac{\partial^4 w}{\partial x^2\partial t^2}+\rho A\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}=0 \qquad ――― (41)$$

次に，梁に働く回転慣性の影響を考える．
軸線方向に沿った単位長さの回転慣性は,

$$\frac{\partial M}{\partial x}=\rho\cdot I\ddot{\theta}=\rho I\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2}$$

であるので，式(33)のモーメントの釣り合い式と重ね合わせて，次式を得る．

$$\frac{\partial M}{\partial x}=-S+\rho I\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} \qquad ――― (42)$$

したがって，得られる運動方程式は,

$$(32)\Leftrightarrow \qquad \rho A\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}=\frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{\partial M}{\partial x}+\rho I\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2}\right)$$

$$\Leftrightarrow \qquad \rho A\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}=\frac{\partial}{\partial x}\left\{-EI\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}-\frac{k\rho}{G}\cdot\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}\right)+\rho I\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(\frac{\partial w}{\partial x}-\frac{kS}{GA}\right)\right\}$$

$$\Leftrightarrow \qquad \rho A\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}=-EI\frac{\partial^4 w}{\partial x^4}+\frac{k\rho EI}{G}\cdot\frac{\partial^4 w}{\partial x^2\partial t^2}+\rho I\frac{\partial^4 w}{\partial x^2\partial t^2}-\frac{k\rho^2 I}{G}\cdot\frac{\partial^4 w}{\partial t^4}$$

$$\Leftrightarrow \qquad \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}+\frac{EI}{\rho A}\cdot\frac{\partial^4 w}{\partial x^4}+\frac{k\rho I}{GA}\cdot\frac{\partial^4 w}{\partial t^4}-\frac{kEI}{GA}\cdot\frac{\partial^4 w}{\partial x^2\partial t^2}-\frac{I}{A}\frac{\partial^4 w}{\partial x^2\partial t^2}=0$$

$$\Leftrightarrow \qquad \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}+c_0{}^2K^2\frac{\partial^4 w}{\partial x^4}+\frac{\varepsilon' K^2}{c_0{}^2}\cdot\frac{\partial^4 w}{\partial t^4}-K^2(1+\varepsilon')\frac{\partial^4 w}{\partial x^2\partial t^2}=0 \qquad ――― (43)$$

ここで，$c_0=\sqrt{\dfrac{E}{\rho}}$，$K=\sqrt{\dfrac{I}{A}}$，$\varepsilon'=\dfrac{kE}{G}=2k(1+\upsilon)=const$ である．

（２） 定常振動解

定常振動解を求めるために，座標と時間についての変数分離解

$$w(x,t)=X(x)\cdot T(t) \qquad ――― (44)$$

を仮定して，式(36)に代入すると

$$X\frac{\partial^2 T}{\partial t^2}+\alpha^4 T\frac{\partial^4 X}{\partial x^4}=0$$

$$\Leftrightarrow \qquad \frac{X^{(4)}}{X}=-\frac{T''}{\alpha^4 T}=\beta^4 \qquad ――― (45)$$

を得る．式(45)は，左辺がｘのみの関数，右辺が ｔ のみの関数であり，$x\neq t$ であるので，$\beta=const$ であり，分離定数と呼ぶ.

したがって，

$$X^{(4)}-\beta^4 X=0 \qquad ———(46)$$

$$T''+(\alpha\beta)^4 T=0 \qquad ———(47)$$

の２式が独立に成り立つことが必要条件となる．２つの常微分方程式の一般解は，

$$X(x)=C_1e^{j\beta x}+C_2e^{-j\beta x}+C_3e^{\beta x}+C_4e^{-\beta x} \qquad ———(48)$$

$$T(t)=C_5e^{j\lambda t}+C_6e^{-j\lambda t} \qquad \left(\lambda=(\alpha\beta)^2\right) \qquad ———(49)$$

これらの式にオイラーの公式を用いて，

$$X(x)=a_1\sin\beta x+a_2\cos\beta x+a_3\sinh\beta x+a_4\cosh\beta x \qquad ———(50)$$

$$T(t)=C\sin(\alpha\beta)^2 t+D\cos(\alpha\beta)^2 t \qquad ———(51)$$

で与えられる．定数a_1～a_4は，梁の両端における４つの境界条件により，定数C,Dは２つの初期条件によって求められる．

２．３．１　片持ち梁

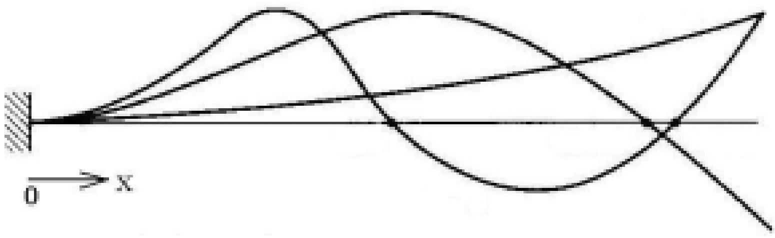


図９　片持ち梁

一端が固定され，もう一端が自由となっている片持ち梁（長さ；ℓ）の境界条件は，

$$\left.\begin{array}{ll} x=0 \text{ で} & X=0,\ \dfrac{dX}{dt}=0 \\ x=\ell \text{ で} & \dfrac{d^2X}{dx^2}=0,\ \dfrac{d^3X}{dx^3}=0 \end{array}\right\} \qquad ———(52)$$

ところで，

$$X'(x)=\beta\{a_1\cos\beta x-a_2\sin\beta x+a_3\cosh\beta x+a_4\sinh\beta x\}$$

$$X''(x)=\beta^2\{-a_1\sin\beta x-a_2\cos\beta x+a_3\sinh\beta x+a_4\cosh\beta x\} \qquad ———(53)$$

$$X'''(x)=\beta^3\{-a_1\cos\beta x+a_2\sin\beta x+a_3\cosh\beta x+a_4\sinh\beta x\}$$

なので，これらの式に境界条件を代入すると，

$$a_2+a_4=0 \qquad ———(54)$$

$$a_1+a_3=0 \qquad ———(55)$$

$$-a_1\sin\beta\ell-a_2\cos\beta\ell+a_3\sinh\beta\ell+a_4\cosh\beta\ell=0 \qquad ———(56)$$

$$-a_1\cos\beta\ell+a_2\sin\beta\ell+a_3\cosh\beta\ell+a_4\sinh\beta\ell=0 \qquad ———(57)$$

式(56),(57)に式(54),(55)を代入して，

$$(56)\Leftrightarrow \quad a_1(\sin\beta\ell+\sinh\beta\ell)+a_2(\cos\beta\ell+\cosh\beta\ell)=0 \qquad ———(56)'$$

$$(57)\Leftrightarrow \quad a_1(\cos\beta\ell+\cosh\beta\ell)+a_2(-\sin\beta\ell+\sinh\beta\ell)=0 \qquad ———(57)'$$

ところで，式(56)',(57)'を行列式にすると，

$$\begin{bmatrix} \sin\beta\ell + \sinh\beta\ell & \cos\beta\ell + \cosh\beta\ell \\ \cos\beta\ell + \cosh\beta\ell & -\sin\beta\ell + \sinh\beta\ell \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

であるが，

$$\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

である時，行列式が満たされるための必要十分条件は，

$$\begin{vmatrix} \sin\beta\ell + \sinh\beta\ell & \cos\beta\ell + \cosh\beta\ell \\ \cos\beta\ell + \cosh\beta\ell & -\sin\beta\ell + \sinh\beta\ell \end{vmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad (\sin\beta\ell + \sinh\beta\ell)(-\sin\beta\ell + \sinh\beta\ell) - (\cos\beta\ell + \cosh\beta\ell)^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad -\sin^2\beta\ell + \sinh^2\beta\ell - \cos^2\beta\ell - 2\cos\beta\ell\cdot\cosh\beta\ell - \cosh^2\beta\ell = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad -(\cos^2\beta\ell + \sin^2\beta\ell) - (\cosh^2\beta\ell - \sinh^2\beta\ell) - 2\cos\beta\ell\cdot\cosh\beta\ell = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad 1 + \cos\beta\ell\cdot\cosh\beta\ell = 0 \qquad \text{———（58）}$$

式(58)の解を計算機で求めると，

$$\beta_1\ell = 1.8751$$
$$\beta_2\ell = 4.6941$$
$$\beta_3\ell = 7.8548$$
$$\beta_4\ell = 10.9955$$
$$\beta_5\ell = 14.1372$$

・・・

である．

参考までに図 10 に $f(x) = 1 + \cos\beta\ell\cdot\cosh\beta\ell$ のグラフを示す．

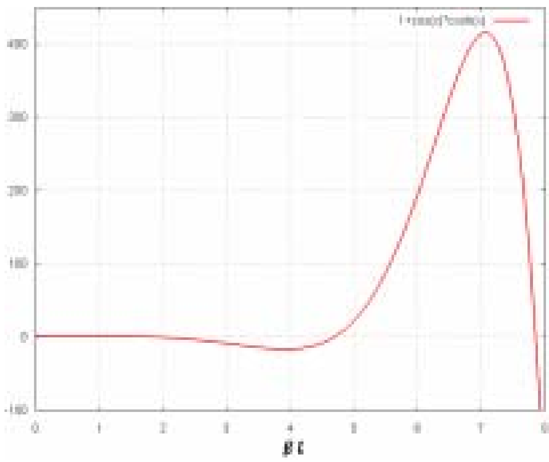


図 10　振動数方程式

また，式(54)～(57)'より，

$$a_2 = \frac{\cos\beta\ell + \cosh\beta\ell}{\sin\beta\ell - \sinh\beta\ell}a_1,\quad a_3 = -a_1,\quad a_4 = -a_2 = -\frac{\cos\beta\ell + \cosh\beta\ell}{\sin\beta\ell - \sinh\beta\ell}a_1$$

と，すべて a_1 に対する比の値として書けるので，式(50)にこれらを代入して，

$$X(x) = a_1\sin\beta x + a_1\frac{\cos\beta\ell + \cosh\beta\ell}{\sin\beta\ell - \sinh\beta\ell}\cos\beta x - a_1\sinh\beta x - a_1\frac{\cos\beta\ell + \cosh\beta\ell}{\sin\beta\ell - \sinh\beta\ell}\cosh\beta x$$

$$\Leftrightarrow \quad X(x) = a_1\left\{\sin\beta x - \sinh\beta x + \frac{\cos\beta\ell + \cosh\beta\ell}{\sin\beta\ell - \sinh\beta\ell}(\cos\beta x - \cosh\beta x)\right\} \qquad \text{———（59）}$$

$X_{\max} = X(\ell)$であるので，

$$X_{\max} = a_1\left\{\sin\beta\ell - \sinh\beta\ell + \frac{\cos\beta\ell + \cosh\beta\ell}{\sin\beta\ell - \sinh\beta\ell}(\cos\beta\ell - \cosh\beta\ell)\right\}$$

$$= a_1\left\{\frac{\sin^2\beta\ell - 2\sin\beta\ell\sinh\beta\ell + \sinh\beta\ell^2}{\sin\beta\ell - \sinh\beta\ell} + \frac{\cos^2\beta\ell - \cosh^2\beta\ell}{\sin\beta\ell - \sinh\beta\ell}\right\}$$

$$= a_1\left\{\frac{-2\sin\beta\ell\sinh\beta\ell}{\sin\beta\ell - \sinh\beta\ell}\right\}$$

したがって，基準振動モードは $X(x) \equiv X/X_{\max}$ で規格化して，

$$X(x) = -\frac{1}{2}\left\{\frac{\sin\beta\ell - \sinh\beta\ell}{\sin\beta\ell \sinh\beta\ell}(\sin\beta x - \sinh\beta x) + \frac{\cos\beta\ell + \cosh\beta\ell}{\sin\beta\ell \sinh\beta\ell}(\cos\beta x - \cosh\beta x)\right\} \qquad ―――（60）$$

ただし，$0 \le \beta x \le 1$ である．

一方，固有角振動数は式(51)より，

$$\omega_i = \alpha^2 \beta_i^{\ 2} = \beta_i^{\ 2}\sqrt{\frac{EI}{\rho A}} \qquad ―――（61）$$

で与えられる．

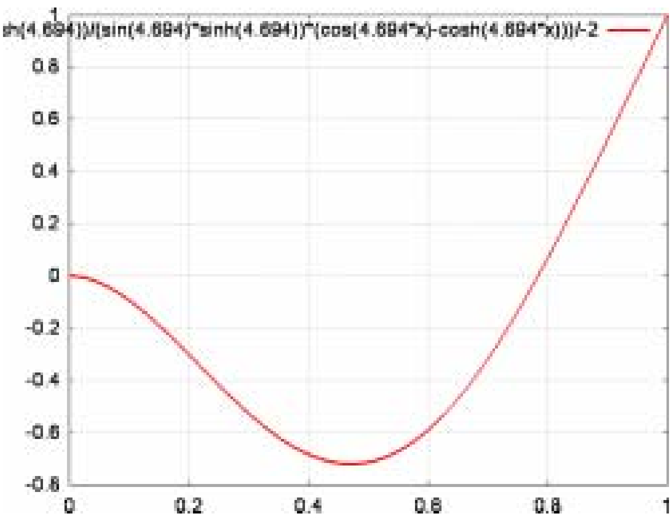
具体的な例として，2 次および 3 次の振動モードの固有角振動数および振動の節は式(60)および式(61)より次の値となる．

- 2 次振動モード

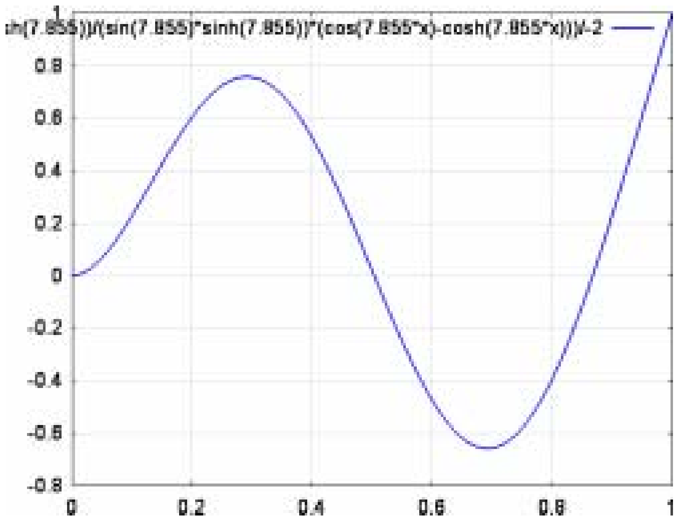
$$\omega_2 = \left(\frac{4.694}{\ell}\right)^2 \sqrt{\frac{EI}{\rho A}}, \qquad 節；x = 0.774\ell$$

- 3 次振動モード

$$\omega_3 = \left(\frac{7.855}{\ell}\right)^2 \sqrt{\frac{EI}{\rho A}}, \qquad 節；x = 0.500\ell,\ \ x = 0.868\ell$$



(a) 2 次振動モード



(b) 3 次振動モード

図 11　片持ち梁の振動モード

２．３．２　両端自由梁

　前節では片端が固定された梁であったが，両側が自由な境界条件は，

$$x=0,\ \ell\ \text{で}\quad \frac{d^2X}{dx^2}=0,\quad \frac{d^3X}{dx^3}=0 \qquad ―――（62）$$

これらを，式(50),(53)に代入して，

$$a_2-a_4=0 \qquad ―――（63）$$

$$a_1-a_3=0 \qquad ―――（64）$$

$$-a_1\sin\beta\ell-a_2\cos\beta\ell+a_3\sinh\beta\ell+a_4\cosh\beta\ell=0 \qquad ―――（65）$$

$$-a_1\cos\beta\ell+a_2\sin\beta\ell+a_3\cosh\beta\ell+a_4\sinh\beta\ell=0 \qquad ―――（66）$$

式(65),(66)に式(63),(64)を代入して，

$$(65)\Leftrightarrow\quad a_1(\sin\beta\ell-\sinh\beta\ell)+a_2(\cos\beta\ell-\cosh\beta\ell)=0 \qquad ―――（65）'$$

$$(66)\Leftrightarrow\quad a_1(-\cos\beta\ell+\cosh\beta\ell)+a_2(\sin\beta\ell+\sinh\beta\ell)=0 \qquad ―――（66）'$$

　前節同様に式(65)',(66)'の代数方程式が同時に 0 でない根を持つ必要十分条件は，次の係数行列式を満たすことである．

$$\begin{vmatrix} \sin\beta\ell-\sinh\beta\ell & \cos\beta\ell-\cosh\beta\ell \\ -\cos\beta\ell+\cosh\beta\ell & \sin\beta\ell+\sinh\beta\ell \end{vmatrix}=0$$

$$\Leftrightarrow\quad (\sin\beta\ell+\sinh\beta\ell)(\sin\beta\ell-\sinh\beta\ell)+(\cos\beta\ell-\cosh\beta\ell)^2=0$$

$$\Leftrightarrow\quad \sin^2\beta\ell-\sinh^2\beta\ell+\cos^2\beta\ell-2\cos\beta\ell\cdot\cosh\beta\ell+\cosh^2\beta\ell=0$$

$$\Leftrightarrow\quad (\cos^2\beta\ell+\sin^2\beta\ell)+(\cosh^2\beta\ell-\sinh^2\beta\ell)-2\cos\beta\ell\cdot\cosh\beta\ell=0$$

$$\Leftrightarrow\quad 1-\cos\beta\ell\cdot\cosh\beta\ell=0 \qquad ―――（67）$$

式(67)の解を計算機で求めると，

$$\beta_1\ell=4.7300$$

$$\beta_2\ell=7.8532$$

$$\beta_3\ell=10.9956$$

$$\beta_4\ell=14.1372$$

$$\beta_5\ell=17.2788$$

・・・

である．

　参考までに図 12 に $f(x)=1-\cos\beta\ell\cdot\cosh\beta\ell$ のグラフを示す．

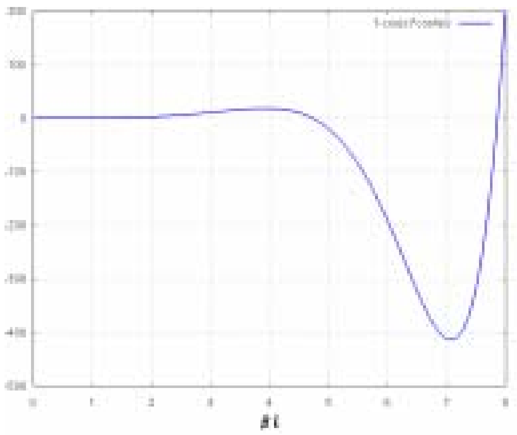


図 12　振動数方程式

また，式(63)～(66)'より，

$$a_2=\frac{\cos\beta\ell-\cosh\beta\ell}{\sin\beta\ell+\sinh\beta\ell}a_1,\quad a_3=a_1,\quad a_4=a_2=\frac{\cos\beta\ell+\cosh\beta\ell}{\sin\beta\ell-\sinh\beta\ell}a_1$$

と，すべて a_1 に対する比の値として書けるので，式(50)にこれらを代入して，

$$X(x)=a_1\sin\beta x+a_1\frac{\cos\beta\ell-\cosh\beta\ell}{\sin\beta\ell+\sinh\beta\ell}\cos\beta x+a_1\sinh\beta x+a_1\frac{\cos\beta\ell-\cosh\beta\ell}{\sin\beta\ell+\sinh\beta\ell}\cosh\beta x$$

$$\Leftrightarrow\quad X(x)=a_1\left\{\sin\beta x+\sinh\beta x+\frac{\cos\beta\ell-\cosh\beta\ell}{\sin\beta\ell+\sinh\beta\ell}(\cos\beta x+\cosh\beta x)\right\} \qquad ―――（68）$$

$X_{\max} = X(0) = X(\ell)$であるので，

$$X_{\max} = 2a_1 * \frac{\cos\beta\ell - \cosh\beta\ell}{\sin\beta\ell + \sinh\beta\ell}$$

したがって，基準振動モードは $X(x) \equiv X / X_{\max}$ で規格化して，

$$X(x) = \frac{1}{2}\left\{ \frac{\sin\beta\ell + \sinh\beta\ell}{\cos\beta\ell - \cosh\beta\ell}(\sin\beta x + \sinh\beta x) + \cos\beta x + \cosh\beta x \right\} \quad \text{———（69）}$$

一方，固有角振動数は式(51)より，

$$\omega_i = \alpha^2 \beta_i^{\ 2} = \beta_i^{\ 2}\sqrt{\frac{EI}{\rho A}} \quad \text{———（70）}$$

で与えられる．

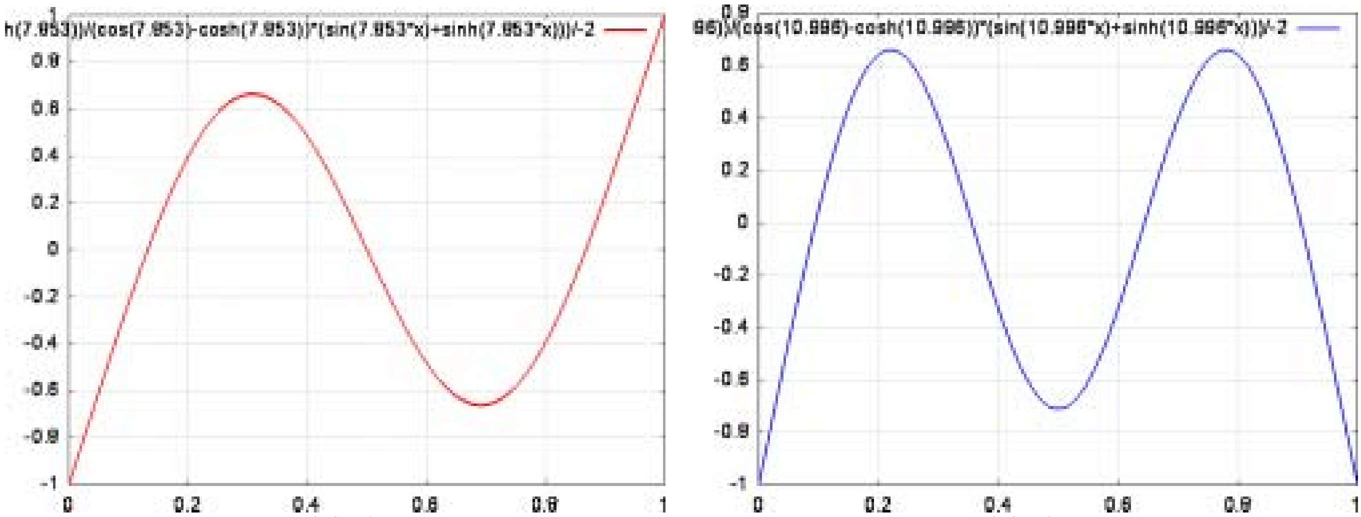
具体的な例として，２次および３次の振動モードの固有角振動数および振動の節は式(69)および式(70)より次の値となる．

- ２次振動モード

$$\omega_2 = \left(\frac{7.853}{\ell}\right)^2 \sqrt{\frac{EI}{\rho A}}, \qquad \text{節；} x = 0.132\ell,\ \ x = 0.500\ell,\ \ x = 0.868\ell$$

- ３次振動モード

$$\omega_3 = \left(\frac{10.996}{\ell}\right)^2 \sqrt{\frac{EI}{\rho A}}, \qquad \text{節；} x = 0.094\ell,\ \ x = 0.356\ell,\ \ x = 0.644\ell,\ \ x = 0.906\ell$$



(a) ２次振動モード　　(b) ３次振動モード

図 13　両端自由梁の振動モード

３．　実験方法

実験は，定常波・非定常波の２通りの入力を用いることにより応答振幅の比較・考察を行う．定常波としては正弦波を，非定常波としてはインパルス波を用いる．

３．１ 定常波を用いる方法

○ 実験装置

基本的な装置の構成を図 14 に示す．①は測定対象の構造物モデル（片持ち梁）である．②の加振器は③の発振器内臓加振器アンプを用いて必要な振幅, 周波数で構造物モデルを振動させることができる．④は変位計で，１つは金尺の端から 5mm の位置に固定し，常にその位置における変位を基準値として測定する．もう一方は，測定位置を変化させながら，構造物モデルの振幅を測定する．④の変位計で測定された振動は, ⑤の変位計用アンプで増幅され, ⑥のオシロスコープで測定される．片持ち梁として用いた金尺の仕様を表 1 に示す．

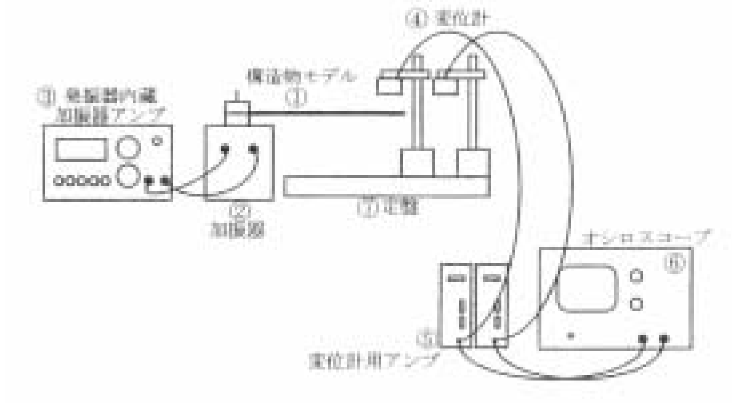


図 14　定常波実験装置

表1　金尺の仕様

長さ	311.5mm
幅	21.5mm
厚さ	0.8mm
材質	鋼

○ 実験方法

発振器の周波数を２Hz からゆっくり上げて，１次～３次の共振を起こしてその振動数を計る．次に，２次または３次の振動モードを変位計とオシロスコープを用いて計測する．このとき，変位計の１つは金尺の端から 5mm の位置に固定し，常にその位置における変位を基準値として測定する．もう一方の変位計で，30 mm ずつ離れた位置における振動モードを計測する．オシロスコープを見て，端から５mm の位置の波と位相が 180 度ずれているときには測定結果に負の符号をつける．そして，それぞれの位置における結果を端から５mm の位置の結果で割って振幅比を算出する．

３．２ 非定常波を用いる方法

○ 実験装置

実験装置の構成を図 15 に示す．①は測定対象の構造物モデルで，その下端に加速度ピックアップ②が固定されている．③は①を加振(打撃)するためのインパルスハンマーである．③には力検出素子が組み込まれており, 加振時にモデルに与える力が検出できる．加速度ピックアップおよび力検出素子の出力は④のチャージアンプによって電圧信号に変換される．電圧に変換された力と加速度の信号は FFT アナライザ⑤に入力される．⑤に入力された信号はディジタル記録された後に, 波形を加工することができる．本実験で用いる主な機能は次の通りである．（１）時刻歴の表示,（２）フーリエスペクトルの計算と表示,（３）伝達関数の計算と表示,（４）平均化機能.

実験装置のスポンジは, モデルに与えられた振動のエネルギの漏洩を小さくするために用いるものである．

加速度ピックアップの設置位置には注意が必要である. 仮に加速度ピックアップを振動の節に設置してしまうと, 特定のモードのみ波形を得ることができず, 十分な測定ができなくなってしまうためである. そこで, ２章の理論で示したように自由端では振幅の腹となるため, 梁の端に加速度ピックアップは設置する.

また, 梁の仕様を表２, 表３に示す. 測定点は構造物モデルを長さ方向に 20 分割した打撃点のうち No.1～11 を測定し, 左右は対称であるとする.

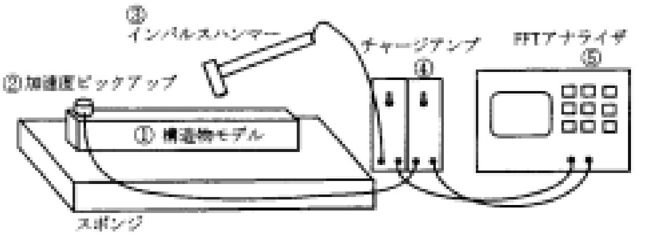


図 15　非定常波実験装置

表2　梁No.1の仕様

長さ	361.2mm
幅	37.4mm
厚さ	9.5mm
材質	鋼

表3　梁No.2の仕様

長さ	500mm
幅	31.9mm
厚さ	29.9mm
材質	鋼

○　実験方法

打点 No.1～11 の順にハンマーで打撃を与え, 先に調べた２次, ３次の振動数ごとの加速度／力（イナータンス）の伝達関数のゲインと位相を読み取り, 記録する. 伝達関数の位相はモデルの減衰が小さく, 測定器が理想的な特性を備えていれば伝達関数のピークでは, ±90°の近辺の値を示す. しかし, 実際にそのように理想的な結果が得られることはまれで, ほぼ 180°だけ異なる２つのグループに別れる. そこで一方のグループに正, 他方に負の符号を与える.

また, No.１の梁に関しては固有振動数の測定のみ行う.

４． 実験結果

４．１ 実験１；定常波を用いた加振実験

得られた１～３次の共振点を表４に示す．また，得られた２次および３次の共振点での振動モードの測定結果を表５および表６に示す．

また，表５，表６の結果を図にしたものが図 16，図 17 である．

表４ １～３次の共振振動数

	振動数 [Hz]
1次	6.5
2次	41.5
3次	116

表5 2次の振動モード

先端からの距離（金尺の目盛）[mm]	固定端からの距離 [mm]	固定端からの距離 正規化した値	センサ1 [V]	センサ2 [V]	振幅比 センサ2/センサ1
5	306.5	0.9839	+4.0	—	+1.0
35	276.5	0.8876	—	+2.25	+0.56
65	246.5	0.7913	—	+0.25	+0.06
95	216.5	0.6950	—	-1.50	-0.38
125	186.5	0.5987	—	-2.65	-0.66
155	156.5	0.5024	—	-3.10	-0.78
170	141.5	0.4543	—	-3.00	-0.75
185	126.5	0.4061	—	-3.00	-0.75
215	96.5	0.310	—	-2.20	-0.55
245	66.5	0.213	—	-1.50	-0.38
275	36.5	0.117	—	-0.50	-0.13
300	11.5	0.0369	—	+0.04	+0.01
309（固定端の近く）	2.5	0.0080	—	+0.14	+0.04

表6 3次の振動モード

先端からの距離（金尺の目盛）[mm]	固定端からの距離 [mm]	固定端からの距離 正規化した値	センサ1 [V]	センサ2 [V]	振幅比 センサ2/センサ1
5	306.5	0.9839	+1.98	—	+1.0
35	276.5	0.8876	—	+0.40	+0.20
65	246.5	0.7913	—	-0.80	-0.41
95	216.5	0.6950	—	-1.76	-0.89
125	186.5	0.5987	—	-0.95	-0.48
155	156.5	0.5024	—	-0.04	-0.02
185	126.5	0.4061	—	+0.90	+0.46
215	96.5	0.310	—	+1.45	+0.73
245	66.5	0.213	—	+1.25	+0.63
275	36.5	0.117	—	+0.55	+0.28
300	11.5	0.0369	—	+0.02	+0.01
309（固定端の近く）	2.5	0.0080	—	-0.325	-0.16

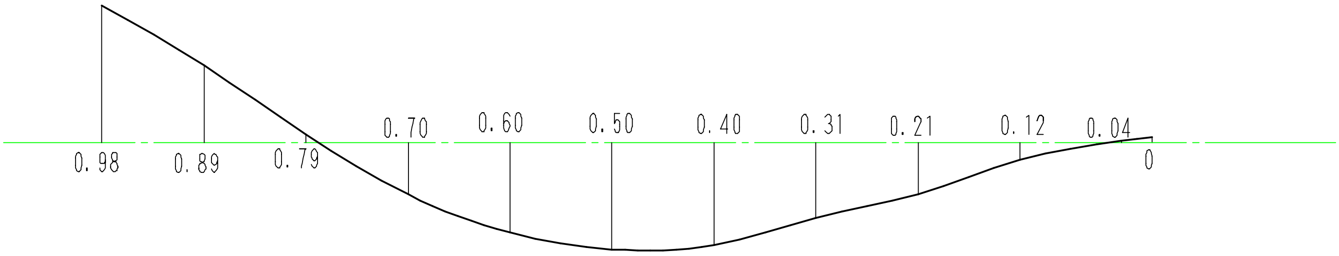


図 16　２次振動モードの測定結果

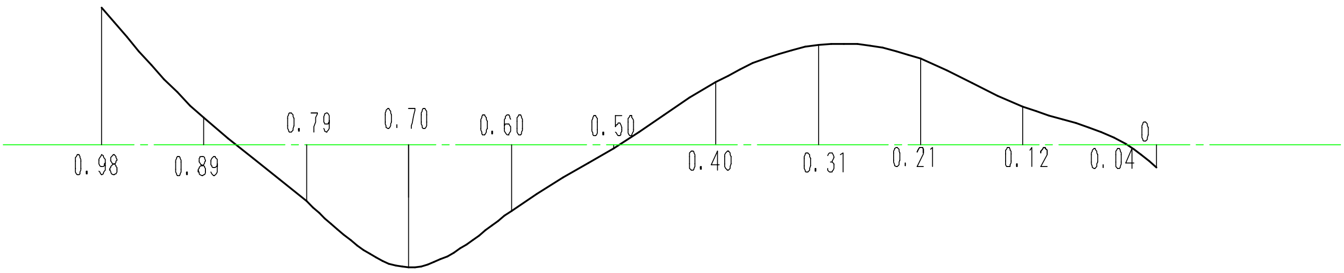


図 17　３次振動モードの測定結果

４．２ 実験２；インパルス波を用いた加振実験

得られた１～４次の共振点を梁 No.1 を表７に，梁 No.2 を表８に示す．また，測定を行なう梁 No.2 における２次および３次の共振点での振動モードの測定結果を表９および表 10 に示す．

また，表９，表 10 の結果を図にしたものが図 18，図 19 である．

表７　梁 No.1 の１～４次の共振振動数

	振動数 [Hz]
1次	375
2次	1037.5
3次	2012.5
4次	3300

表８　梁 No.2 の１～４次の共振振動数

	振動数 [Hz]
1次	450
2次	1212.5
3次	2300
4次	3687.5

表9　2次振動モード　1212.5 [Hz]

打撃点	伝達関数			振幅比
	ゲインA [dB]	位相 [deg]	振幅 B	B/B_{max}
1	36.56	80.9	67.30	1.000
2	32.25	79.3	40.97	0.6088
3	24.31	79.9	16.42	0.2441
4	20.20	-96.3	10.23	0.1520
5	28.91	-97.6	27.89	0.4145
6	32.64	-98.8	42.85	0.6368
7	33.68	-99.7	48.31	0.7178
8	32.87	-98.9	44.00	0.6539
9	30.49	-98.9	33.46	0.4971
10	24.94	-97.8	17.66	0.2624
11	-0.93	-111.2	0.90	0.013

表10　3次振動モード　2300.0 [Hz]

打撃点	伝達関数			振幅比
	ゲインA [dB]	位相 [deg]	振幅 B	B/B_{max}
1	36.36	-101.5	65.77	1.000
2	28.97	-105.7	28.09	0.4270
3	10.59	83.3	3.385	0.05146
4	30.05	82.6	31.81	0.4836
5	33.11	79.5	45.24	0.6878
6	32.41	77.6	41.73	0.6346
7	29.88	81.9	31.19	0.4742
8	9.78	82.3	3.08	0.0469
9	28.20	-99.2	25.70	0.3908
10	32.27	-97.6	41.07	0.6244
11	33.75	-100.9	48.70	0.7404

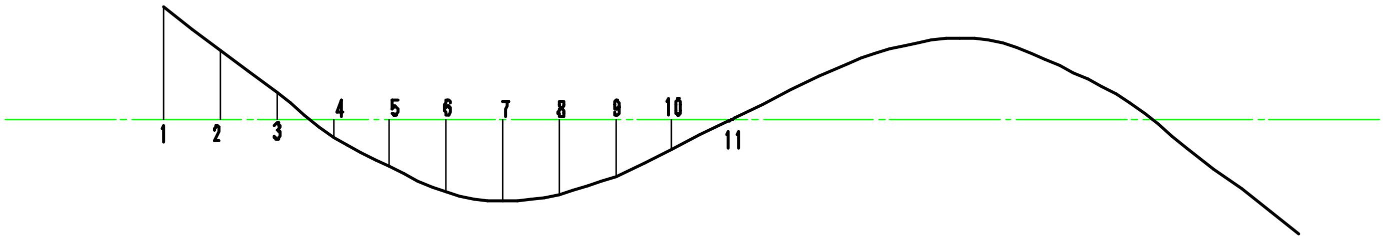


図 18　２次振動モード

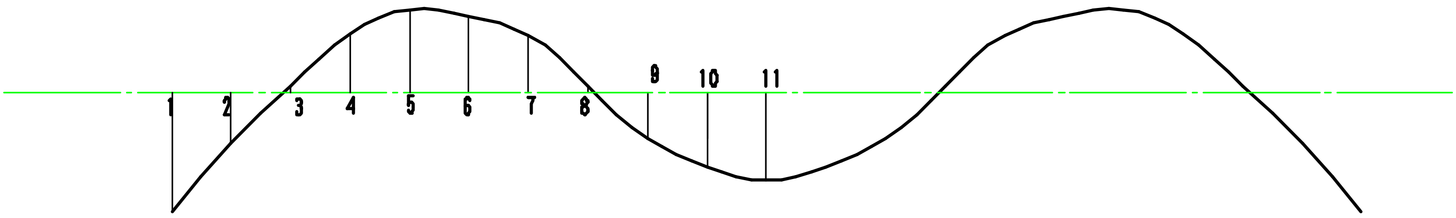


図 19　３次振動モード

図 16～19 は得られた測定点を曲線で結んだグラフであるが，このグラフを見るかぎり若干のゆがみは見られるものの, 正弦波の関数を逸脱した測定点は見受けられないので測定ミスは無いといえる.

５．　考察

実験では鋼類の材料を用いて測定を行なったが, ここでは材料を仮定して振動状態の考察を行なう.

今回は，チタン合金（6Al-4V）にしてみよう．チタン合金の密度は ρ＝4400[kg/m³]，ヤング率は E=106[GPa]である.

５．１ 片持ち梁

（1） 振動数

式(61)より，固有角振動数は,

$$\omega_i = \alpha^2 \beta_i^{\,2} = \beta_i^{\,2} \sqrt{\frac{EI}{\rho A}}$$

したがって，共振振動数 f は,

$$f_i = \frac{\omega_i}{2\pi} = \frac{\beta_i^{\,2}}{2\pi} \sqrt{\frac{EI}{\rho A}} \qquad ———（71）$$

である.

式(58)より，オイラー・ベルヌーイの式より,

$$\beta_1 \ell = 1.875, \qquad \beta_2 \ell = 4.694, \qquad \beta_3 \ell = 7.855$$

であるので，共振振動数は,

$$f_1 = \frac{1}{2\pi}\left(\frac{1.875}{\ell}\right)^2 \sqrt{\frac{EI}{\rho A}}, \qquad f_2 = \frac{1}{2\pi}\left(\frac{4.694}{\ell}\right)^2 \sqrt{\frac{EI}{\rho A}}, \qquad f_3 = \frac{1}{2\pi}\left(\frac{7.855}{\ell}\right)^2 \sqrt{\frac{EI}{\rho A}}$$

これら共振振動数の比を取ると，

$$f_1 : f_2 : f_3 = {\beta_1}^2 : {\beta_2}^2 : {\beta_3}^2 = 1 : 6.267 : 17.55 \qquad \text{———（72）}$$

一方，表４（p.18）より測定値の比は，

$$\frac{f_2}{f_1} = \frac{41.5}{6.5} = 6.4, \qquad \frac{f_3}{f_1} = \frac{116}{6.5} = 18$$

とほぼ理論通りであり，誤差を，

$$\text{誤差} \equiv \frac{\left| \text{理論値} - \text{測定値} \right|}{\text{理論値}} \qquad \text{———（73）}$$

で定義して，式(72)の値を有効数字２桁で考えると，

$$\frac{f_2}{f_1}\ ;\ \text{誤差} = \frac{6.4-6.3}{6.3} = 1.6\ \ [\%], \qquad \frac{f_3}{f_1}\ ;\ \text{誤差} = \frac{18-18}{18} = 0\ \ [\%]$$

と誤差は皆無といえる.

ところで，ここでチタン合金の振動数を求めてみる.

金尺の仕様より，幅ｂ＝21.5[mm]，厚さ h=0.8[mm]，長さ $\ell = 311.5$[mm]であるので，

断面積　　　　　　：$A = bh = 21.5 \times 0.8 = 17.2$　[mm²]

断面二次モーメント：$I = \dfrac{bh^3}{12} = \dfrac{21.5 \times 0.8^3}{12} = 0.917$　[mm⁴]

よって，式(71)より

$$f_i = \frac{\omega_i}{2\pi} = \frac{{\beta_i}^2}{2\pi}\sqrt{\frac{EI}{\rho A}} = \frac{{\beta_i}^2}{2\pi}\sqrt{\frac{106 \times 0.917}{4400 \times 17.2} \times 10^3} = 0.189{\beta_i}^2 \ \ [\text{Hz}]$$

式(58)より，オイラー・ベルヌーイの式の $\beta_1 \sim \beta_3$ は，

$$\beta_1 = \frac{1.875}{\ell} = 6.019, \quad \beta_2 = \frac{4.694}{\ell} = 15.07, \quad \beta_3 = \frac{7.855}{\ell} = 25.22 \qquad [1/\text{m}]$$

したがって，

$$f_1 = 0.189 \times 6.019^2 = 6.84\,[\text{Hz}], \quad f_2 = 42.9\,[\text{Hz}], \quad f_3 = 120\,[\text{Hz}]$$

これら，チタン合金の共振振動数と実験で得た共振振動数の値（p.18・表４）は，近い値となっている．これは，振動数の式が，$f \propto \sqrt{E/\rho}$ であるのに対し，

炭素鋼；$\sqrt{E/\rho} = \sqrt{206 \times 10^9 / 7900} = 5.11 \times 10^3$　[m^0.5/s]

チタン合金；$\sqrt{E/\rho} = \sqrt{106 \times 10^9 / 4400} = 4.91 \times 10^3$　[m^0.5/s]

と，4%程しか値に差がないためである.

したがって, 炭素鋼からチタン合金に材料変更する際は, 共振点の点から見れば特に設計変更を必要としないことが分かる.

（２） 振幅

測定によって得られた結果と, オイラー･ベルヌーイの式より得た振動方程式を２次振動, ３次振動に分けて，図 20,図 21 に示す．ただし，測定結果のグラフに関しては近似方程式による図示を用い，Microsoft Excel による６次関数近似を用いた.

また，各測定点の誤差を，式(73)の定義のしたがって求めた結果を表 11，表 12 に示す.

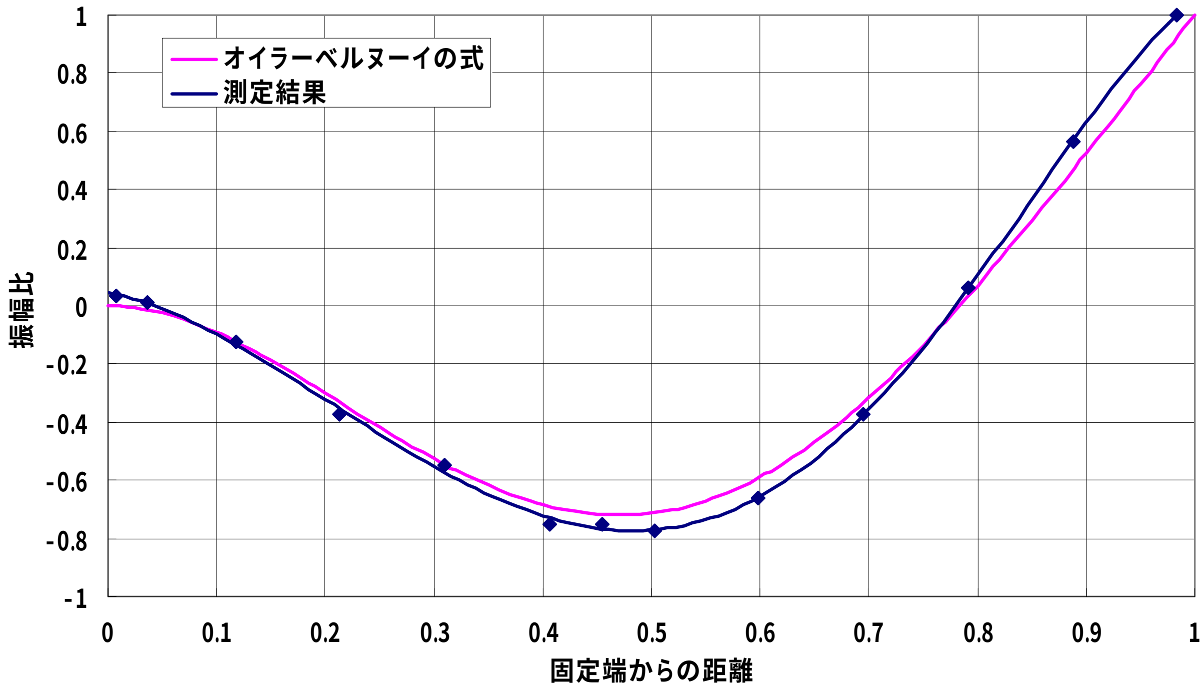


図20　片持ち梁･2次の振動モード

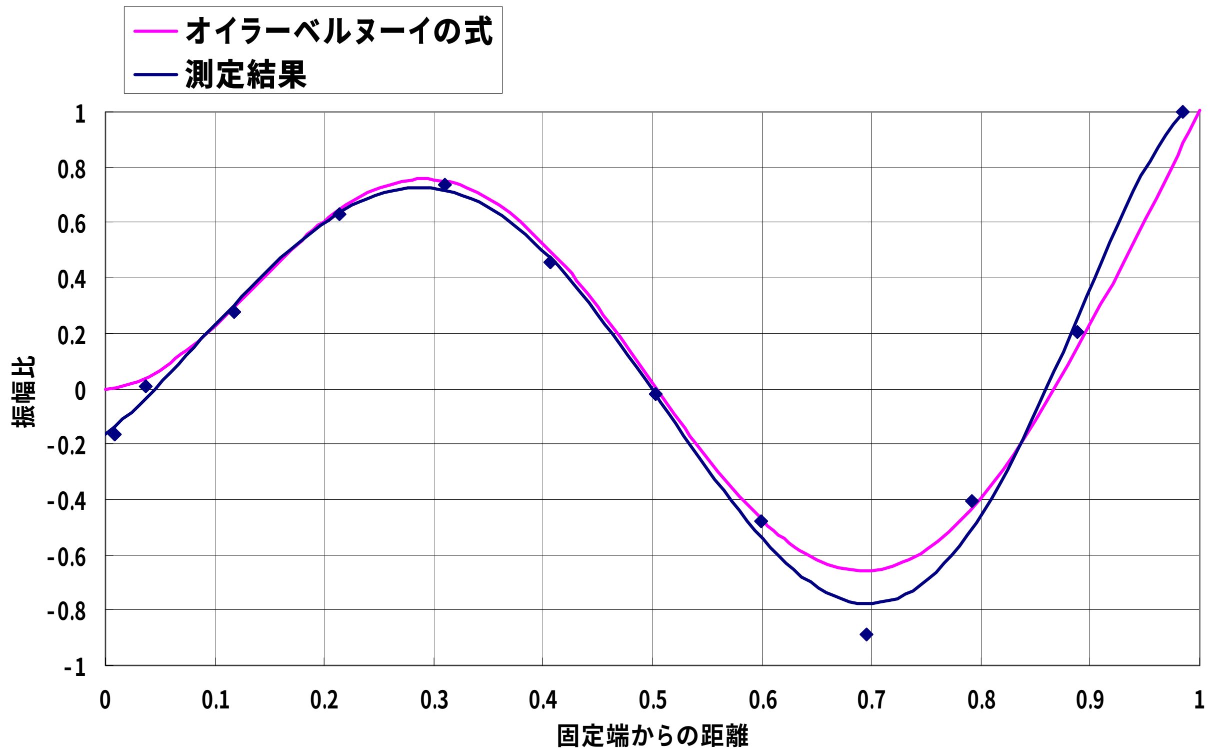


図21　片持ち梁･3次の振動モード

表11　2次振動モードの誤差

x/l	理論値	測定値	誤差 [%]
0.98	0.923	1.00	8.3
0.89	0.466	0.56	21
0.79	0.033	0.06	89
0.70	-0.334	-0.38	12
0.60	-0.592	-0.66	12
0.50	-0.713	-0.78	8.8
0.45	-0.718	-0.75	4.4
0.41	-0.689	-0.75	8.8
0.31	-0.546	-0.55	0.79
0.21	-0.332	-0.38	13
0.12	-0.123	-0.13	1.6
0.04	-0.014	0.01	170
0.008	-0.001	0.04	5100

表12　3次振動モードの誤差

x/l	理論値	測定値	誤差 [%]
0.98	0.877	1.00	14
0.89	0.140	0.20	44
0.79	-0.434	-0.41	6.6
0.70	-0.658	-0.89	35
0.60	-0.469	-0.48	2.6
0.50	0.006	-0.02	420
0.41	0.501	0.46	9.0
0.31	0.751	0.73	2.2
0.21	0.644	0.63	1.8
0.12	0.294	0.28	5.4
0.04	0.038	0.01	73
0.01	0.002	-0.16	8600

表 11，表 12 に定義に基づき，誤差を列記したが，誤差のオーダーが全く異なっている．これは，誤差の定義の仕方に問題があるからである．式(73)を用いて誤差を計算すると，振動の節の部分では理論値の振幅が 0 となるのに対して，測定値が計測誤差・機器誤差等で値を持ってしまった場合に誤差が無限大に発散してしまう．表 11，表 12 の誤差のオーダーが 10^2 程度またはそれ以上となっているのは節付近である．したがって，表の誤差の値は振動の節どうし，腹どうしの比較で確認することしかできない．また，節・腹が２つしかない２次振動モードでは，この誤差の確認行為も意味があるのか疑わしい．

したがって，誤差の確認方法としては，図から読み取る視覚的な差や，相関係数を用いて比較するのが望ましい．

グラフを目視比較すると，図 20,図 21 の両グラフに共通して腹の部分では理論式と測定結果の差が大きくなっている．しかし，節の部分と腹の部分では振幅の量的な値が違うので，ズレを割合で比較したときに一定の割合でズレているのか，腹の部分だけがズレているのかは判断できない．

また，３次振動モードにおいて，$x/\ell = 0.70$ の値が大きくずれている．他の測定点と比較して局所的に理論値から逸脱した値を示しているので，実験の時には気付かなかったが，この点のみは異常値と判断できるので考察は行わない．

両グラフともに，$x/\ell = 1.0$ の自由端部分の誤差が大きくなっている．これは梁の端の部分の測定を行なわなかったことに起因している．振幅は梁端部の $x/\ell = 1$ での振幅が最大振幅となり，最大振幅を基準振幅として扱っている．しかし，今回の実験では金尺の端の測定を行なわず，5mm の位置から測定を開始しているため，$x/\ell = 0.984$ での振幅が最大振幅・基準振幅として扱った．そのため，基準振幅値がズレているために全体にわたり値が外れ，梁端部では特に大きな誤差を発生することになった．

ここまで述べた測定誤差とは異なり，$x/\ell = 0$ での振幅に大きな誤差を生じている．固定端以外の振動の節では理論値との差が小さくなっているのにもかかわらず，固定端部分では大きな誤差を生じている．したがって，これまで述べた理由とは異なる誤差を生じていると考えられる．

この固定端部分には加振装置がある．加振にも振幅があるのでこの部分は梁の振幅を読み取ったのではなく加振装置による加振の振幅を読み取ったものと思われる．

ここで疑問になることは，加振装置の振幅を一定にして測定を行なったにもかかわらず２

次振動モードと３次振動モードで振幅比が異なっていることである．

しかし，これはモードの違いによる振幅の絶対量の違いに起因している．２次のモードに比べ，３次のモードは振動の節・腹の数が多いため節の間隔も狭い．今回の実験で行なったような梁の振動は剛体の変形によって起こるため,変位速度の差が少なければ歪も一定であるので，節の間隔が狭いほど変形量は小さくなる．変形量が小さいことは，すなわち振幅が小さいことを意味し，高次モードになるにしたがって振幅の絶対量は小さくなる．

したがって,２次モードより振幅の絶対量の小さい３次モードは加振による影響が相対的に大きくなる．そのために，２次振動モードと３次振動モードで固定端の振幅比が異なっている．

また，理論値と測定値の相関係数ｒは,

２次振動モードの相関係数；$r = 0.9991$

３次振動モードの相関係数；$r = 0.990$

と，高い相関性が伺える．

（３） 振幅の節・腹

測定した振動の節および腹の位置は，図より

- ◆ ２次振動モード
  節；$x/\ell = 0.04$，$x/\ell = 0.78$　　腹；$x/\ell = 0.50$，$x/\ell = 1.0$
- ◆ ３次振動モード
  節；$x/\ell = 0.05$，$x/\ell = 0.50$，$x/\ell = 0.85$　　腹；$x/\ell = 0.28$，$x/\ell = 0.70$，$x/\ell = 1.0$

一方，式(60)から得られる，理論値の節と腹の位置は,

- ◆ ２次振動モード
  節；$x/\ell = 0$，$x/\ell = 0.783$　　腹；$x/\ell = 0.471$，$x/\ell = 1.0$
- ◆ ３次振動モード
  節；$x/\ell = 0$，$x/\ell = 0.504$，$x/\ell = 0.868$　　腹；$x/\ell = 0.291$，$x/\ell = 0.692$，$x/\ell = 1.0$

固定端や自由端側で節や腹がズレているものの，端部以外の節や腹の位置には，若干の読み取り誤差はあるものの，ほぼ理論値と一致している．

５．２ 両端自由梁

（1） 振動数

オイラー・ベルヌーイの式より得た振動数方程式(67)より

$$\beta_1\ell = 4.730, \quad \beta_2\ell = 7.853, \quad \beta_3\ell = 10.996, \quad \beta_4\ell = 14.137$$

であるので，式(72)より，

$$f_1 : f_2 : f_3 : f_4 = \beta_1{}^2 : \beta_2{}^2 : \beta_3{}^2 : \beta_4{}^2 = 1 : 2.576 : 5.404 : 8.933$$

一方，測定値では，p.19 表７,表８より，

◆ 梁 No.1

$$\frac{f_2}{f_1} = \frac{1037.5}{375} = 2.767, \quad \frac{f_3}{f_1} = \frac{2012.5}{375} = 5.367, \quad \frac{f_4}{f_1} = \frac{3300}{375} = 8.800$$

誤差は,

$$f_2/f_1 \;;\; 誤差 = \frac{2.767 - 2.576}{2.576} = 7.415 \quad [\%]$$

$$f_3/f_1 \;;\; 誤差 = \frac{5.404 - 5.367}{5.367} = 0.6894 \quad [\%]$$

$$f_4/f_1 \;;\; 誤差 = \frac{8.933 - 8.800}{8.933} = 1.489 \quad [\%]$$

◆ 梁 No.2

$$\frac{f_2}{f_1} = \frac{1212.5}{450.0} = 2.694, \quad \frac{f_3}{f_1} = \frac{2300.0}{450.0} = 5.111, \quad \frac{f_4}{f_1} = \frac{3687.5}{450.0} = 8.194$$

誤差は,

$$f_2/f_1 \;;\; 誤差 = \frac{2.694 - 2.576}{2.576} = 4.581 \quad [\%]$$

$$f_3/f_1 \;;\; 誤差 = \frac{5.367 - 5.111}{5.367} = 4.770 \quad [\%]$$

$$f_4/f_1 \;;\; 誤差 = \frac{8.933 - 8.194}{8.933} = 8.273 \quad [\%]$$

梁 No.1 では， f_2/f_1 で大きな誤差を生じているが， f_3/f_1， f_4/f_1 では誤差が１％未満であるので非常に誤差が小さい． f_2/f_1 が大きな誤差を生じている理由としては，誤差の定義式(73)は，誤差を求めたい値が小さいときには誤差が大きくなるため，その影響によるものと思われる．

一方，梁 No.2 はすべての振動数比で誤差が大きく，振動数比が大きくなるにしたがって誤差も大きくなっている．

梁 No.1 と No.2 で異なる点は梁の厚さであり，この厚さの違いが誤差発生の原因であると思われる．理論の節でも述べたが，オイラー・ベルヌーイの式はせん断力によって生じる梁の変形や断面の回転運動に伴う回転慣性の影響を無視している．梁の厚さが増した場合,自重が増すために特に回転慣性の影響が大きくなり,影響が無視できなくなってくるためである．とくに加振の振動数が増すと波の加速度の変動も増すために，より誤差は増す．梁 No.2 の f_4/f_1 で特に誤差が大きいのはこのためであり，５次,６次の共振振動数ではよりいっそう誤差が増すものと推測できる．

では，課題の振動数の比較を行う．

材料を一般構造鋼の SS400 と仮定すると，E=206 [GPa]， ρ＝7900 [kg/m^3]より，

$$\text{梁 No.1；} \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{EI}{\rho A}} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{206}{7900}\times\frac{9.5^2}{12}\times 10^3} = 2.228 \text{ [m/s]}$$

$$\text{梁 No.2；} \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{EI}{\rho A}} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{206}{7900}\times\frac{29.9^2}{12}\times 10^3} = 7.015 \text{ [m/s]}$$

である．

◆ 梁 No.1

上記の値より，共振振動数を求めると，

$$f_1 = 382.3\,[\text{Hz}],\quad f_2 = 1053.0\,[\text{Hz}],\quad f_3 = 2064.5\,[\text{Hz}],\quad f_4 = 3413.2\,[\text{Hz}],$$

と測定値と若干の差はあるものの振動数は近い値を示す．したがって，実験に使用した試験片の材料は，炭素鋼か，もしくは$\sqrt{E/\rho} \approx 5.1\times 10^3$[m$^{0.5}$/s]の材料といえる．また，その差は f_1 および f_2 で 2%以内， f_3 で 3%以内， f_4 で 4%以内であり振動数が増すごとに差が大きくなっていく．

◆ 梁 No.2

同様にして，共振振動数を求めると，

$$f_1 = 627.8\,[\text{Hz}],\quad f_2 = 1730.4\,[\text{Hz}],\quad f_3 = 3392.8\,[\text{Hz}],\quad f_4 = 5607.9\,[\text{Hz}],$$

と梁 No.１と異なり，40～50%の差となっている．

確かに，梁 No.2 は長さに対して厚さが大きく，せん断力による変形や回転慣性の影響を無視できない．しかし，共振回転数が 50%もズレるのは異常である．文献[8)]によると h/ℓ の比が 0.1 でも曲げ振動の値より２%程度共振振動数が小さくなるに留まる様である．したがって，ここで異なる材料を仮定して，もう一度共振振動数を求めてみる．

材料のヤング率および密度を E=130 [GPa]， ρ＝7800 [kg/m^3]と仮定すると，

$$\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{EI}{\rho A}} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{130}{7800}\times\frac{29.9^2}{12}\times 10^3} = 5.608 \text{ [m/s]}$$

この値を用いて，振動数を求めると，

$$f_1 = 461.7\,[\text{Hz}],\quad f_2 = 1272.6\,[\text{Hz}],\quad f_3 = 2495.0\,[\text{Hz}],\quad f_4 = 4124.1\,[\text{Hz}],$$

と測定値と近い値である上に,振動数が増すごとに測定値から大側に理論共振数が外れていくことより，今回実験に用いた梁 No.2 の材料は$\sqrt{E/\rho} \approx 3.8\times 10^3$[m$^{0.5}$/s]の材料といえる．

ただし，ここでは材料の判別を行なうことは実験の目的とはしていないので，これ以上の材料についての考察は行わないことにする．

（2） 振幅

測定によって得られた結果と,オイラー・ベルヌーイの式より得た振動方程式を２次振動,３次振動に分けて，図 22,図 23 に示す．ただし，測定結果のグラフに関しては近似方程式による図示を用い，Microsoft Excel による６次関数近似を用いた．

また，各測定点の誤差を，式(73)の定義のしたがって求めた結果を表 13，表 14 に示す．

表13　2次振動モード

打点	x/l	理論値	測定値	誤差 [%]
1	0	1	1.00	0.000
2	0.05	0.608	0.61	0.141
3	0.1	0.227	0.24	7.30
4	0.15	-0.117	-0.15	29.4
5	0.2	-0.397	-0.41	4.34
6	0.25	-0.585	-0.64	8.90
7	0.3	-0.662	-0.72	8.42
8	0.35	-0.625	-0.65	4.70
9	0.4	-0.483	-0.50	2.91
10	0.45	-0.263	-0.26	0.146
11	0.5	0	-0.01	∞

表14　3次振動モード

打点	x/l	理論値	測定値	誤差[%]
1	0	-1	-1.00	0.000
2	0.05	-0.454	-0.43	5.86
3	0.1	0.052	0.05	1.03
4	0.15	0.442	0.48	9.51
5	0.2	0.643	0.69	6.99
6	0.25	0.621	0.63	2.16
7	0.3	0.397	0.47	19.5
8	0.35	0.044	0.05	5.73
9	0.4	-0.328	-0.39	19.2
10	0.45	-0.608	-0.62	2.75
11	0.5	-0.711	-0.74	4.11

理論値と測定値の相関係数ｒは,

２次振動モードの相関係数；$r = 0.9992$

３次振動モードの相関係数；$r = 0.9986$

と，高い相関性が伺える.

図 22，図 23（p.26）より，非定常振動においても振動の腹の部分で目視では大きな差が確認できるが，表 13，表 14 に示す誤差の値は，前節の定常波の実験との比較をすると全体として小さくなっている.

しかしながら，見た目にも図 22，図 23 は理論と測定値と高い相関性が伺えるが，相関係数は定常波・２次モードの図 20 と同程度である．ただし，相関係数の値としては高い値である.

振幅の観点から見ると，今回の試験片の厚さではオイラー・ベルヌーイの式で説明ができない程の誤差は無いことが相関係数およびグラフの目視判断から伺える.

（３）　振幅の節・腹

図 22，図 23 より得られる振幅の節と腹は,

- ◆　２次振動モード

  節；$x/\ell = 0.13$，$x/\ell = 0.5$，$x/\ell = 0.87$　　腹；$x/\ell = 0$，$x/\ell = 0.3$，$x/\ell = 0.7$，$x/\ell = 1.0$

- ◆　３次振動モード

  節；$x/\ell = 0.095$，$x/\ell = 0.35$，$x/\ell = 0.65$，$x/\ell = 0.905$

  腹；$x/\ell = 0$，$x/\ell = 0.21$，$x/\ell = 0.5$，$x/\ell = 0.79$，$x/\ell = 1.0$

一方，式(69)から得られる，理論値の節と腹の位置は,

- ◆　２次振動モード

  節；$x/\ell = 0.132$，$x/\ell = 0.5$，$x/\ell = 0.868$

  腹；$x/\ell = 0$，$x/\ell = 0.308$，$x/\ell = 0.692$，$x/\ell = 1.0$

- ◆　３次振動モード

  節；$x/\ell = 0.094$，$x/\ell = 0.356$，$x/\ell = 0.644$，$x/\ell = 0.906$

  腹；$x/\ell = 0$，$x/\ell = 0.220$，$x/\ell = 0.5$，$x/\ell = 0.780$，$x/\ell = 1.0$

と腹と節の位置は完全に一致している.

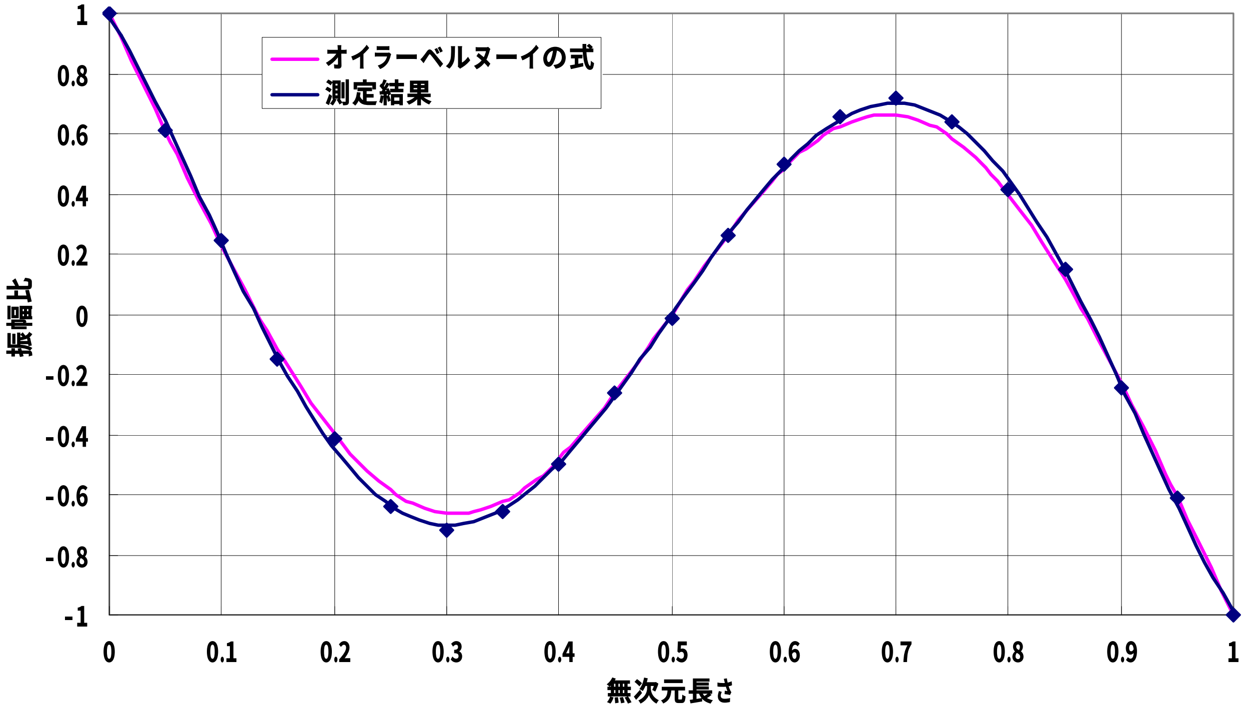


図22　両端自由梁･2次の振動モード

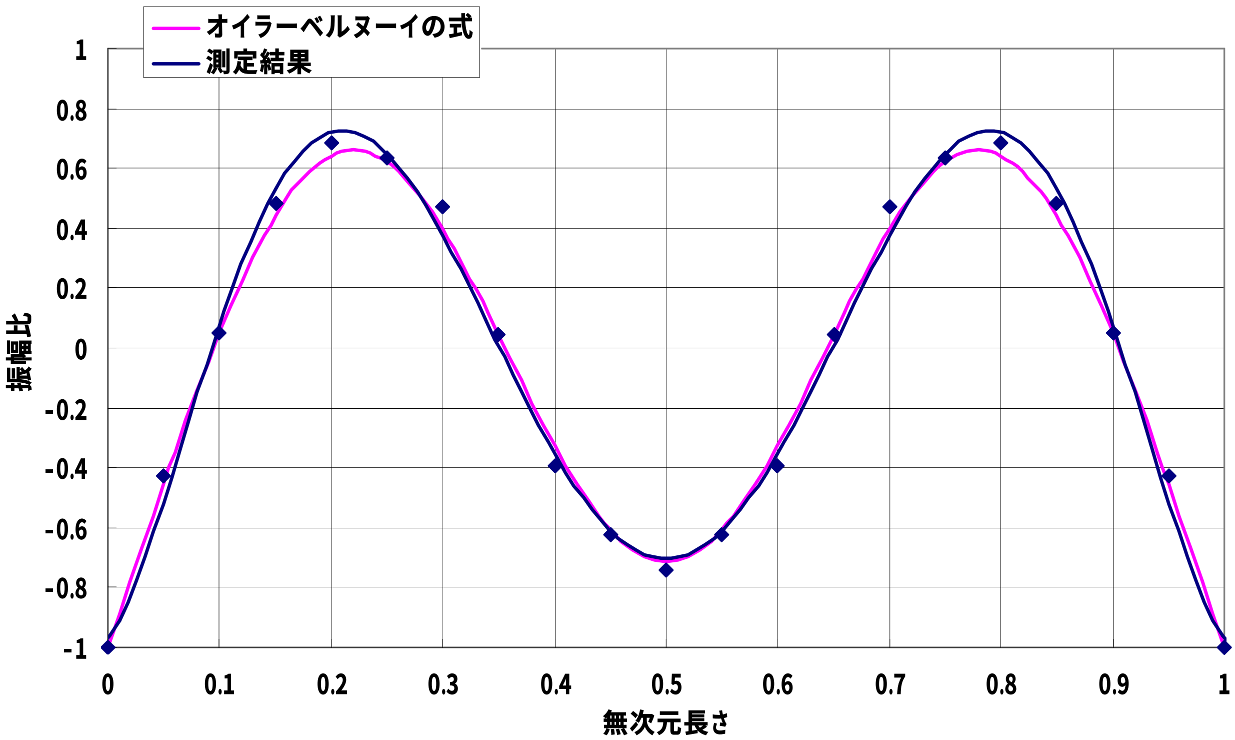


図23　両端自由梁･3次の振動モード

６．　検討

ここでは，２章（P.9,P.10）で導出したチモシェンコの運動方程式(43)を用いて実験２の梁 No.2 の共振振動数と振幅の様子を検討してみる．

$$(43)\Leftrightarrow \quad \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}+c_0{}^2K^2\frac{\partial^4 w}{\partial x^4}+\frac{\varepsilon' K^2}{c_0{}^2}\cdot\frac{\partial^4 w}{\partial t^4}-K^2(1+\varepsilon')\frac{\partial^4 w}{\partial x^2\partial t^2}=0$$

ここで，$c_0=\sqrt{\dfrac{E}{\rho}}$，$K=\sqrt{\dfrac{I}{A}}$，$\varepsilon'=\dfrac{kE}{G}=2k(1+\upsilon)=const$ であり，長方形断面では形状係数は$k=1.5$である．

まず，$w(x,t)$を変数分離して，

$$w(x,t)=X(x)\cdot\exp(i\omega t) \qquad ―――(74)$$

とおき，チモシェンコ梁の式(43)に代入すると，

$$(43)\Leftrightarrow \quad -\omega^2X+c_0{}^2K^2\frac{\partial^4 X}{\partial x^4}+\frac{\varepsilon' K^2}{c_0{}^2}\cdot\omega^4X+K^2(1+\varepsilon')\omega^2\frac{\partial^2 X}{\partial x^2}=0$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{d^4X}{dx^4}+\frac{(1+\varepsilon')}{C_0{}^2}\omega^2\frac{d^2X}{dx^2}+\left(\frac{\varepsilon'}{c_0{}^4}\cdot\omega^4-\frac{\omega^2}{c_0{}^2K^2}\right)X=0$$

ここで，$\xi=\dfrac{1+\varepsilon'}{C_0{}^2}$，　$\eta=\dfrac{\varepsilon'}{C_0{}^4}$，　$\zeta=\dfrac{1}{c_0{}^2K^2}$　とおくと

$$\Leftrightarrow \quad \frac{d^4X}{dx^4}+\xi\omega^2\frac{d^2X}{dx^2}+(\eta\omega^4-\zeta\omega^2)X=0 \qquad ―――(75)$$

よって，この常微分方程式の解を $X(x)=X_0\cdot e^{\beta x}$ とおくと特性方程式は

$$\beta^4+\xi\omega^2\beta^2+(\eta\omega^4-\zeta\omega^2)=0$$

$$\therefore \quad \beta^2=\frac{-\xi\omega^2\pm\sqrt{\xi^2\omega^4-4(\eta\omega^4-\zeta\omega^2)}}{2}$$

したがって，特性方程式の根βは,

$$\begin{cases}\beta_1=\pm\sqrt{\dfrac{\xi\omega^2+\sqrt{\xi^2\omega^4-4(\eta\omega^4-\zeta\omega^2)}}{2}}\cdot i\\[2ex] \beta_2=\pm\sqrt{\dfrac{-\xi\omega^2+\sqrt{\xi^2\omega^4-4(\eta\omega^4-\zeta\omega^2)}}{2}}\end{cases} \qquad ―――(76)$$

と表される．

よって，式(75)の解は,

$$X(x)=a_1\sin\beta_1x+a_2\cos\beta_1x+a_3\sinh\beta_2x+a_4\cosh\beta_2x \qquad ―――(77)$$

である．これを境界条件を用いて，2.3.2 節のように代数方程式を解くと,

$$1-\cos\beta_1\ell\cdot\cosh\beta_2\ell=0 \qquad ―――(78)$$

の振動数方程式を得る．この式(78)を満たすβ_1,β_2の値を求めれば，$\xi,\ \eta,\ \zeta$ は試験片の固有値であるので，共振角振動数ω_iが得られる．

オイラー･ベルヌーイの式より得た振動数方程式はβが試験構造物に影響しない定数であったが，式(78) のβ_1,β_2の値は，$\xi,\ \eta,\ \zeta$ など試験片の固有値（ヤング率，密度，ポアソン比，形状）に影響され，共振振動数はこれら固有値により変動することになる．

したがって，チモシェンコ梁の式では試験片の物性値が重要となってくる．

梁 No.2 は，データシートには材料が鋼と記されているが，5.2 節(1)のように本当に鋼であるかは疑わしい．よって，物性値としては一般構造鋼の SS400 と前節で計算を行った E=110[GPa]，ρ＝7800[kg/m³]，ポアソン比ν＝0.3 の仮想金属の２材料で振動数および振幅を確認する．

６．１ 振動数

（1） SS400

一般構造鋼 SS400 のヤング率，密度，ポアソン比は，

E=206 [GPa]， ρ＝7800 [kg/m³]， ν＝0.3

である．したがって，式(76)の特性方程式の解 β_1, β_2 は，

$$\begin{cases} \beta_1 = \pm\sqrt{\dfrac{1.88\times10^{-7}\times\omega^2+\sqrt{\left(1.88\times10^{-7}\right)^2\times\omega^4-4\left(5.74\times10^{-15}\times\omega^4-5.15\times10^{-4}\times\omega^2\right)}}{2}}\cdot i \\ \beta_2 = \pm\sqrt{\dfrac{-1.88\times10^{-7}\times\omega^2+\sqrt{\left(1.88\times10^{-7}\right)^2\times\omega^4-4\left(5.74\times10^{-15}\times\omega^4-5.15\times10^{-4}\times\omega^2\right)}}{2}} \end{cases}$$

であり，

$$f\left(\beta_1, \beta_2\right) = 1-\cos\beta_1\ell\cdot\cosh\beta_2\ell$$

とすると，上式の β_1, β_2 はωのみの関数であるので，

$$\Leftrightarrow \qquad f(\omega) = 1-\cos\beta_1\ell\cdot\cosh\beta_2\ell \qquad ———（79）$$

と表すことができる．

よって，計算機を用いて $f(\omega)=0$ となるωを求めると，

$\omega_1 = 3884.1$[rad/s]， $\omega_2 = 10419$[rad/s]， $\omega_3 = 19688$[rad/s]， $\omega_4 = 31132$[rad/s]・・・

である．したがって， $f = \omega/2\pi$ よりチモシェンコ梁の共振振動数は，

$f_1 = 618.2$ [Hz]， $f_2 = 1658.3$ [Hz]， $f_3 = 3133.4$ [Hz]， $f_4 = 4954.8$ [Hz]，

である．この値と 5.2 節(1)で求めたオイラー・ベルヌーイ梁の共振振動数を表 15 に示す．

表 15 より，高い振動数の共振振動数ほどオイラー・ベルヌーイの式とチモシェンコの式との開きが大きくなっている．これは，前章で考察を行ない何度も述べているように，チモシェンコ梁ではせん断力によって生じる梁の変形や断面の回転運動に伴う回転慣性の影響を考慮しているため，角振動数が高くなるほど慣性力が高くなるため共振振動数はオイラー・ベルヌーイの式に比べて小さくなっている．

表15 オイラー・ベルヌーイ梁とチモシェンコ梁の共振振動数の比較

	f_1 [Hz]	f_2 [Hz]	f_3 [Hz]	f_4 [Hz]
Euler-Bernoulli	627.8	1730.4	3392.8	5607.9
Timoshenko	618.2	1658.3	3133.4	4954.8
1-(Timo/E・B) [%]	1.5	4.2	7.6	11.6

また，5.2 節のように各振動数の比を比較してみると，

$$\frac{f_2}{f_1} = \frac{1658.3}{618.2} = 2.682, \qquad \frac{f_3}{f_1} = \frac{3133.4}{618.2} = 5.069, \qquad \frac{f_4}{f_1} = \frac{4954.8}{618.2} = 8.015$$

これらの値と，実験測定値との誤差を求めると，

$$f_2/f_1 \text{；誤差} = \frac{2.694-2.682}{2.682} = 0.447 \quad [\%]$$

$$f_3/f_1\ ;\ 誤差=\frac{5.111-5.069}{5.069}=0.829\ \ [\%]$$

$$f_4/f_1\ ;\ 誤差=\frac{8.194-8.015}{8..015}=2.23\ \ [\%]$$

であり，４次振動数では少し差があるが，振動数比が測定値と SS400 のチモシェンコ梁の共振振動数と近い値となっていることが分かる．

実験測定値，オイラー・ベルヌーイ梁，チモシェンコ梁の共振振動数をまとめたものを表 16 および図 24 に示す．

これらの図より，異なる材料であるにもかかわらず，チモシェンコ梁の振動数比は測定結果に一致し，オイラー･ベルヌーイ梁は高次共振振動数になるほど値が外れる様子が分かる．

表16　共振振動数比の比較

	f_1/f_1	f_2/f_1	f_3/f_1	f_4/f_1
測定値	1	2.694	5.111	8.194
Euler-Bernoulli	1	2.756	5.404	8.933
Timoshenko	1	2.682	5.069	8.015

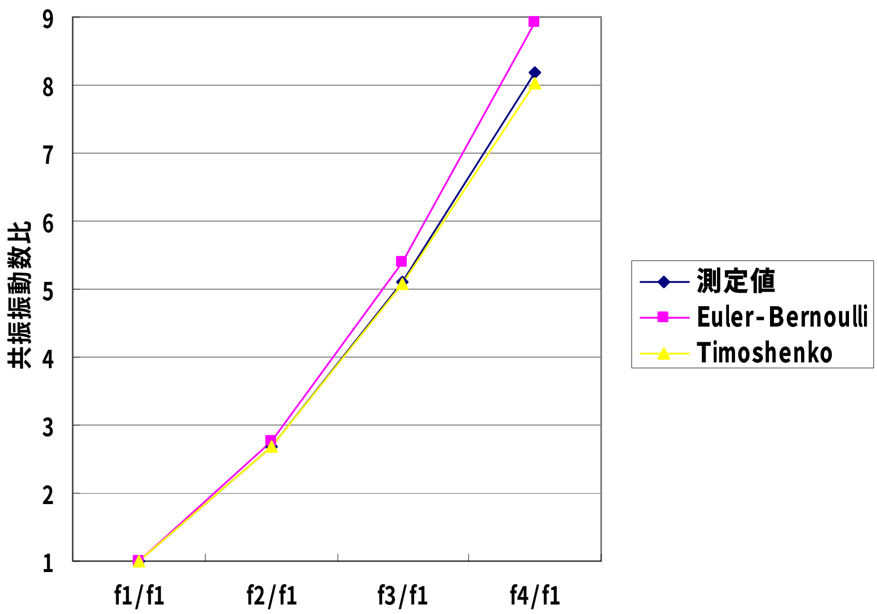


図24　振動数比の比較

（２）　仮想金属

（１）と同様にして，E=110[GPa]，ρ＝7800[kg/m³]，ポアソン比ν＝0.3 の仮想金属の共振振動数を求めた結果を表 17 に示す．

この表 17 より，仮定した物性値で実験結果の共振振動数を表現できることが分かる．

表17　仮想金属と測定値の共振振動数の比較

	f_1	f_2	f_3	f_4
Timoshenko [Hz]	454.6	1219.5	2304.3	3643.8
測定値 [Hz]	450.0	1212.5	2300.0	3687.5
誤差 [%]	1.01	0.574	0.187	1.20

６．２ 振幅

ここでは，チモシェンコ梁の振幅を図的に表現する．

チモシェンコ梁では，振幅を示す式が梁の物性値に依存するので，まず材料を決定する．今回は,前節で共振振動数が測定値と近い値となった仮想金属の物性値を用いることにする．

したがって，E=110[GPa]，ρ＝7800[kg/m³]，ポアソン比ν＝0.3 である．

チモシェンコ梁の運動方程式の振幅の式は，式(77)より式の形がオイラー・ベルヌーイ梁の振幅の式と等しいので，次式となる．

$$X(x)=\frac{1}{2}\left\{\frac{\sin\beta_1\ell+\sinh\beta_2\ell}{\cos\beta_1\ell-\cosh\beta_2\ell}\left(\sin\beta_1 x+\sinh\beta_2 x\right)+\cos\beta_1 x+\cosh\beta_2 x\right\} \quad \text{―――(80)}$$

ところで数値計算より，この仮想金属での，梁の２次振動モード・３次振動モードでの角振動数および β_1,β_2 は次の値となる．

２次振動モード；$\omega_2=7662$ [rad/s]， $\beta_1=15.71$ [rad/m]， $\beta_2=15.04$ [rad/m]

３次振動モード；$\omega_3=14479$ [rad/s]， $\beta_1=21.99$ [rad/m]， $\beta_2=20.27$ [rad/m]

したがって，これらの値よりチモシェンコ梁の振幅は次ページ図 25，図 26 となる．

図 25,図 26 を比較しても振幅の様子は,ほとんど重なっており差を見出すことは難しい．しかし，図 25 の２次振動モードに比べ，３次振動モードの振幅は若干減少気味に見える．これは，２次モードに比べ３次モードの方が振動数が高いため，せん断力によって生じる梁の変形や断面の回転運動に伴う回転慣性の影響により振幅が減少したと思われる．

よって，図的に判断すれば，低次の振動モードではオイラー・ベルヌーイ梁の式で振幅を説明することに問題無いと言える．

６．３ まとめ

梁の厚さが増すと，共振振動数は梁の変形や回転慣性の影響が無視できなくなるため，オイラー・ベルヌーイ梁で得られる共振振動数よりも小さな値となる．その差は，高次振動モードになるほど誤差は大きくなる．

一方，振幅については低次振動モードでは，オイラー・ベルヌーイ梁とチモシェンコ梁にほとんど差は見られないため，導出の簡単な前者を選ぶことが望ましい．しかしながら，振動数の高い高次振動モードや,厚さ比の大きい試験片およびポアソン比が大きい材料などでは低次振動モードでもオイラー・ベルヌーイ梁の式では振幅の誤差が大きくなる．ヤング率と密度は振幅にさほど影響しないようである．

さて，次ページ図 25，図 26 において，振幅の測定値が理論式より若干ズレているが，これは厚さによる影響ではなく，測定による影響であると推測できる．

仮に厚さが誤差の要因であれば，測定点がオイラー・ベルヌーイ梁の式より小さい振幅にならなければならないが，測定値は振幅が大きくなる側に外れている．また，チモシェンコ梁の式を見ても分かるように,この振動数ではせん断変形や回転慣性が振幅に与える影響は小さい．したがって梁の厚さによって，この測定点が外れているわけではない．

誤差の原因は，梁の端の測定点である．

両端自由梁において最大振幅は自由端において発生する．しかし装置の都合上，どうしても最端測定点（打点１）は梁の若干内側となってしまう．また，すべての振幅の値は最大振幅で規格化している．そのため，最大振幅と仮定した測定値が最大振幅で無ければ，相対的に振幅の各測定値は大きな値となる．このために，測定誤差として理論式よりも測定値の振幅の値が大きくなる．

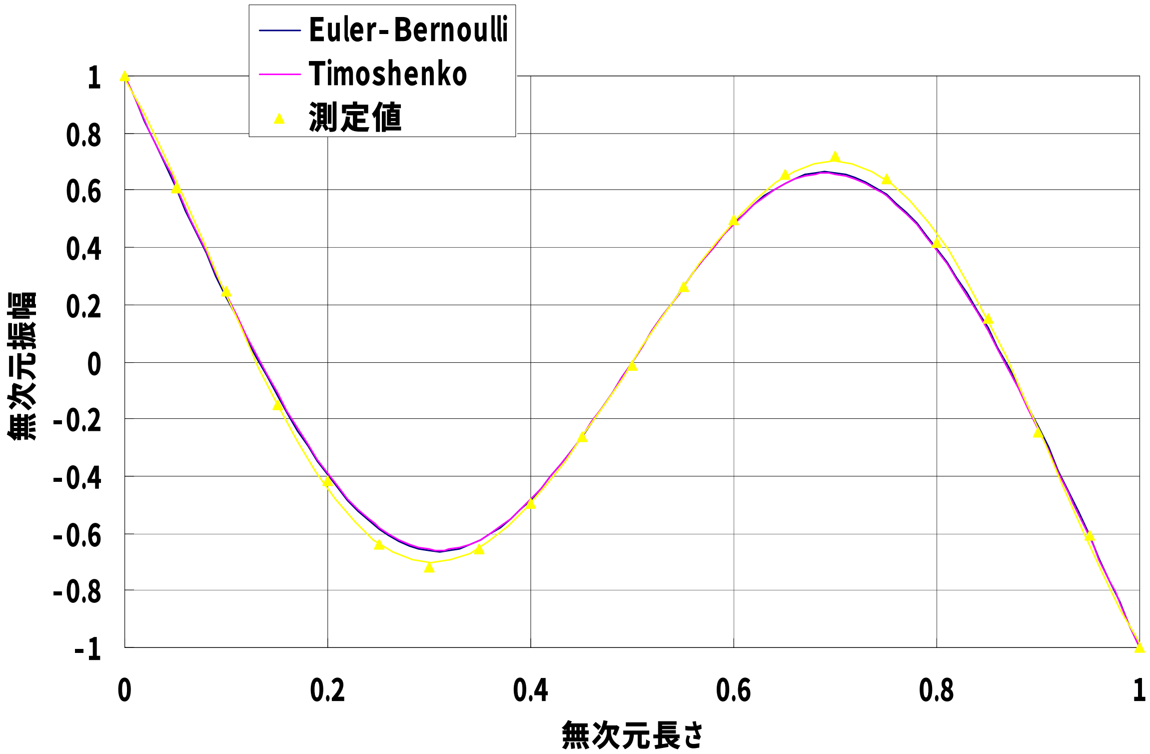


図25　2次振動モード

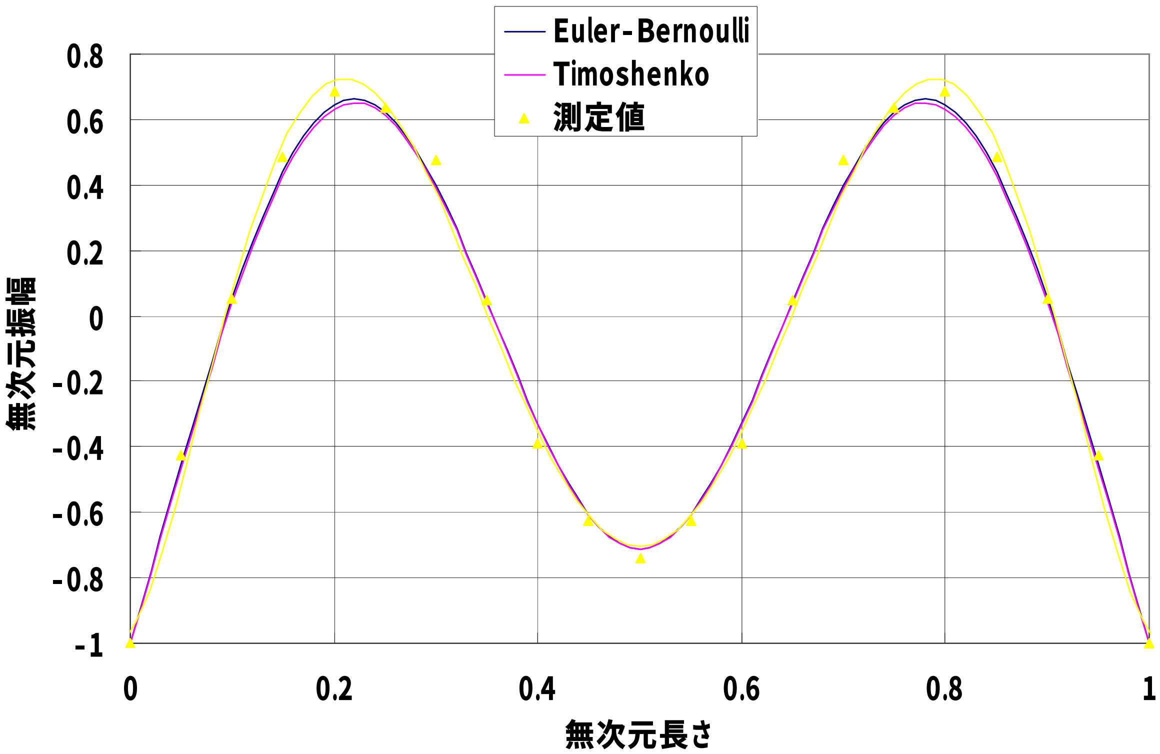


図26　3次振動モード

７．　課題；共振とは

物体に加振を与えた場合に，その加振した振動数と物体の持つ固有振動数（質量，バネ定数の関数）が一致した際に，物体が振動する物理現象の事を指す．

共振点はｎ自由度系の物体であればｎ個の共振点を持つ．

特に，減衰装置を持たないときは共振時の振幅が無限大に発散する（P.4，P.5）．

したがって，工業的な共振を防ぐ方法としては，ダンパーの取り付けが最も有効であり，多くがこの方法で共振の制御を行なっている．それ以外にもフラッター振動の対策では形状を流線形にするなどの加振を減らす方法が，回転機器では設計回転数の変更により共振点から回転振動数をずらす方法などがよく採られるようである．

余談であるが，私は橋好きなので，ここですこし橋に関する共振現象を述べてみる．

日常の構造物で共振が最も問題となるものは，ビルや橋などの建築構造物であろう．これらの建築物で最も問題となる振動は風による加振である．有名なタコマ橋のようにカルマン渦の発生からフラッター現象を生じてしまうと，負減衰強制振動となるために破壊されるまで振動を続けてしまう．これを回避する方法として，当時は橋桁の下にさらに橋桁を設置してボルトで固定することにより，カルマン渦による振動を抑えていたようである．現在では橋桁を流線形につくるなどして渦の発生を抑える方法で設計されている．

その他，おもしろい振動としては，人間の歩調による加振がある．小さな釣橋など，人間が歩くことにより横揺れを発生してしまう橋の場合，もちろん多少の振動は設計の際に考慮されているが，複数の人間が同時に橋を渡る場合は危険となる．というのも，横揺れ振動の上を人間が歩く場合，自分の体に加えられる横揺れを小さくしようと，無意識に横揺れに合わせた歩調をとってしまうようである．そのため，橋が振動状態（共振状態）でさらに同じ周波数で加振されることになり振幅が大きくなる．この振動を防ぐために，小さな橋でもダンパーが取り付けられているようである．これに関連して，実際の話かどうか定かではないが，古代ローマ軍は橋を渡る際に隊の歩調をバラバラに乱して渡っていたという話もある．

８．　結言

多自由度系の振動モデルであっても梁などの一般的な形状の物体であれば，基礎的な物理恒等式である力の釣り合いやモーメントの釣り合い式より導く運動量方程式で振動の様子を表現することができ，オイラー・ベルヌーイの式はせん断力によって生じる梁の変形や断面の回転運動に伴う回転慣性の影響を無視しているものの適応できる範囲は広く，今回の実験ではこの式で問題は無いことが確認できた．

また，定常波・非定常波と加振が異なっても共振点における物理現象としては等しく，同じ運動方程式で物理現象を表現できる．したがって，実験２のように解析装置を用いれば１度の衝撃を与えるだけで（実験では３度），一定範囲の振動数における共振点を見つけることができ，１度の測定で同時に複数の共振点の振動モードを解析できるので，実験１の方法に比べると手間と時間が削減でき，有効な方法といえる．ただし実験１の方法も，振動現象を実感し，実際に振動状態を目で見ることのできる長所を持っている．

９． 感想

今回の測定では定常波の測定実験において，自由端側の端（金尺の端；目盛 0mm）での振幅測定を行なっていないので，自由端付近の誤差が大きくなっている．

また，理論上の最大振幅は $x = 1.0\ell$ で得られるが，今回の測定では $x = 0.98\ell$ を最大振幅とし，さらにそれを基準振幅として無次元化しているので，最大振幅の誤差は振幅全体の誤差に影響を与える．金尺の端の測定は難しいが，端から 1～2mm 程度の位置の測定は可能であろう．

二つ目として，こちらも実験１の内容であるが，固定点の機器誤差・測定誤差・加振による誤差と複数の誤差が複合しているため考察が難しい．

予備実験として, 共振でないときの共振点付近の振動数で振幅を測定してみるのも誤差要因の検討を行う上で役立ちそうである．

また, 疑問に思った点として, 加振の波と共振の波が重ね合わせされるため節と腹の位置は多少ずれると思われる．しかし, 測定結果を見ると固定点でのズレほど節や腹は変動していない. また, 単純に重ね合わせをすると自由端で最大振幅が得られないことも考えられる．しかし，自由端側の端の振幅を測定していないので，実際はどうなのか分からない．

加振の振幅の与える影響は, 固定端側ではモード解析からハッキリ伺えるが, それが固定端から離れた位置ではどの程度影響しているのか検討する必要がある．

もう一点, 非定常波の測定に用いた梁のでは長さに対する厚さの比が大きいため, 他の薄板梁とは異なり，共振振動数を求める際に梁の物性値が必要となる．したがって，せめて梁 No.2 の材料名やヤング率・密度・ポアソン比を与えてもらいたかった．

≪参考文献≫

１）田中皓一，マシンダイナミクス（2004）
２）長松昭男，モード解析入門，コロナ社（1993）
３）西岡隆，構造振動解析，培風館（1987）
４）日本機械学会 編，モード解析の基礎と応用，丸善株式会社（1986）
５）谷口修，振動工学，コロナ社（1978）
６）中川憲治・室津義定・岩壷卓三；工業振動学，（1997），森北出版
７）S.Timoshenko，工業振動学，商工出版（1959）
８）小坪清眞，入門建設振動学，森北出版（1996）