１．　目的と意義

生産システムが確立した現在では，製品の開発に必要な期間は年々短くなり，開発期間の短縮は市場競争上有利である．というのも，第一に設計に要する期間短縮はコストの低減となること．第二に，現在の市場ニーズは多様化・短期間化しており，開発期間が長いほどユーザーニーズの先行き予測は困難になり，商品企画がよりいっそう難しくなってしまうからである．

したがって，自動車などの機械および機械部品を設計する場合，試しに造って→試験して→評価して→造り直して→試験して…，などと繰り返していたのでは，テスト車両を作るだけでも時間もコストがかかり，期待した試験結果を得た頃には，コンセプトした自動車のニーズや流行が終わってしまっていそうである．

そのため，ある程度の方向性を試作前に得ていれば，試作の修正が少なくすることが可能となる．しかしながら，円柱や梁など，単純な構成要素で造られた構造物であれば材料力学や弾性力学の知識で理論解が得られるが，現在の機械および機械部品は軽量化・低コスト化・デザイン（見ため・安全性・空力デザインなど）のために３次元形状となることが当たり前となってきている．

そこで必要となっているのがコンピュータを利用した設計および解析である．近年のコンピュータ技術の進歩により，計算機の演算速度は急速に高くなり，複雑かつ多大な量の計算も比較的容易に行えるようになってきている．そのため，構造解析も紙と鉛筆で行うものからコンピュータ技術を取り入れる時代へと変化することとなった．

そこで，今回の実験（実習）では，コンピュータの構造解析の中でも広範囲に用いられている有限要素法を用いた解析プログラムを用いて，負荷を受け単純な形状の機械部品の二次元弾性応力解析を行い，その解析結果と材料力学・弾性力学から得られる理論解との比較を行うことによって，有限要素法解析の特徴および使用に際した必要留意事項について理解することが目的である．

２．　原理

有限要素法を用いる．有限要素法については多くの書物･文献に示されている通りである．

３．　解析内容および解析方法

３．１ 有限要素ソフトウェア

本実習で用いるソフトウェアは名古屋工業大学大学院生が中心となって製作された，要素分割ソフトウェア MashMake と，有限要素法計算および計算結果も表示ソフトウェア Stnavi である．

MashMake では，平板材料の形状を決定し，要素分割および境界条件の設定を行う．MashMake で得られた材料形状および特性データは，Stnavi を用いて計算（定式化と逆行列の求解）され，その結果が表示される．また，計算誤差が小さくなるように要素分割を自動的に修正する機能がついており，変更した要素分割によってさらに高精度の有限要素法計算が行える．

したがって，今回行う解析では，この計算誤差の修正前後の比較をし，考察をする．

図１に今回の解析手法の仕事の流れを示す．

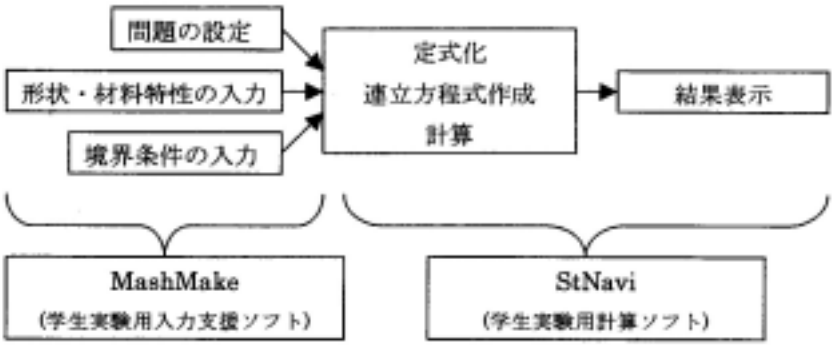


図１　有限要素法による数値解析の流れ

３．２ 解析内容

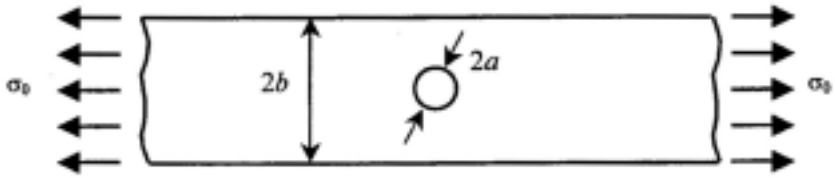


図２　中央に１個の円孔を持つ有限要素幅の板

今回解析を行うのは，図２に示すような有限幅の板において，引張応力σ_0を負荷した際の応力およびひずみを，特に円孔周りのそれらの値の比較を行う．

≪解析における注意≫

有限要素法は未知定数を求める際に，マトリックスを利用し，既知の定数{Y}，未知の定数{X}とすると，

$$\{Y\} = [D]\{X\}$$

$$\Leftrightarrow \quad [D]^{-1}\{Y\} = [D]^{-1}[D]\{X\} \qquad \therefore \{X\} = [D]^{-1}\{Y\}$$

として計算を行うので，逆行列$[D]^{-1}$が存在しないときには計算を行うことはできない．

また, コンピュータの演算においてはニュートン法などの近似計算により数値を得るため, 理論上は$[D]^{-1}$が存在しない場合でもコンピュータの計算誤差により$[D]^{-1}$が値を持ってしまうことがある．

逆行列$[D]^{-1}$が存在しない例としては，剛体変位の発生する問題が挙げられる．これは, 物体の両端に荷重を掛けるような問題において, 荷重における両端の変位を求めるときなどでは, 変位である解が一意に決まらないことにより起こる．具体的には両端の荷重を解析する際に, 若干の誤差が存在するだけで物体は力の釣り合いを満たせず安定しなくなってしまったり, 物体が等速度運動しながら力の釣り合いを考える場合などで, 節点が常に移動してしまうために変位の境界条件を与えることができないためである．

今回解析する物体も図２を見ても分かるように両軸引張りの変位を求めるので剛体変位の発生する問題に挙げられる

したがって，この剛体変位を抑えるために今回のような対称図形, 対称荷重における解析

では, 図３のように対称線（中心線）で分割し, さらに対称線部分を固定点として取り扱い, 計算を行う.

また, このことは剛体変位が発生しないだけでなく, 図形面積が小さくなることに伴いメッシュモデルの節点も少なくなるのでマトリックスも小さくなり, 計算速度が高くなるメリットもある.

また, 今回解析を行う図形の寸法と負荷応力は図４に示すとおりである.

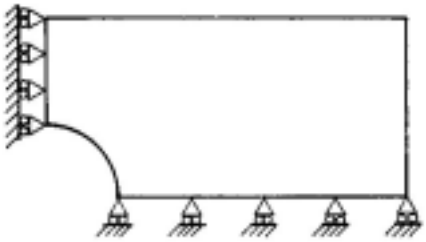


図３　解析図形

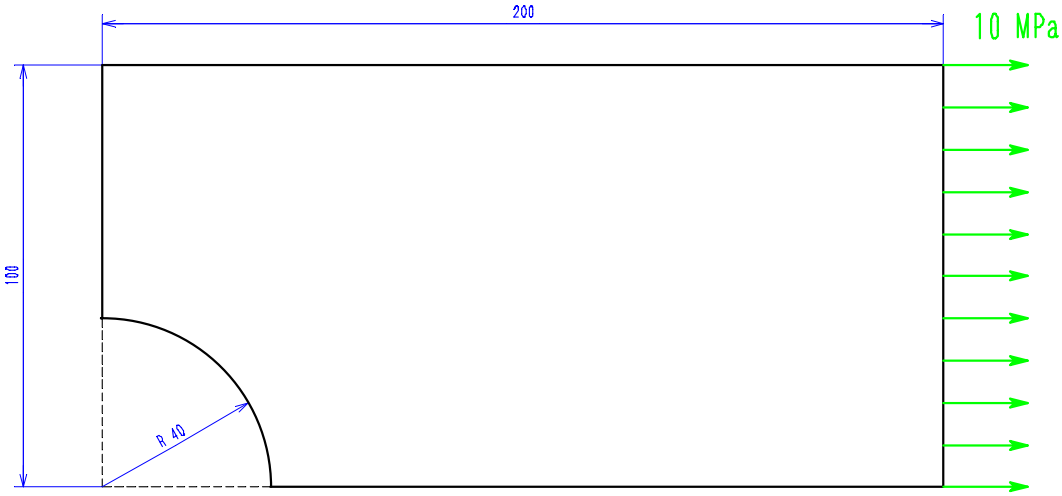


図４　解析図形の寸法および応力

４．　理論―――円孔による応力集中

４．１ 円孔を持つ無限板

引張応力を受ける板に円孔が存在すると,孔縁部分は応力集中をして局部的に高い応力値となる.図５のように遠方でｘ方向に一様な引張応力$\sigma_x = \sigma_0$を受ける無限板に，半径 a の円孔が存在する場合の応力集中を求める.

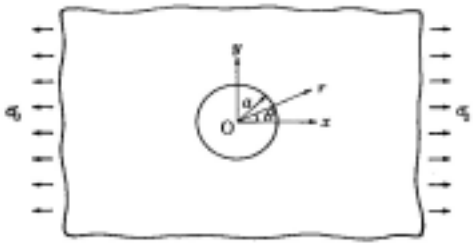


図５　円孔のある板

境界条件は，自由端では垂直応力が 0，またサンブナンの定理より円孔から離れた遠方では，孔の影響は無視できることより，

〔境界条件〕；遠方で，$\sigma_x = \sigma_0$，$\sigma_y = 0$，$\tau_{xy} = 0$

孔縁（$r = a$）で，$\sigma_r = 0$，$\tau_{r\theta} = 0$

である.

この境界条件によりエアリーの応力関数を求める手法は，G.Krisch(1898)により導出されており，多くの弾性力学の教科書に導出式が示されているので，今回のレポートでは導出はしない.

エアリーの応力関数φの条件，$\nabla^4\phi = 0$を境界条件の下で解くと，

$$\phi = \left(-\frac{1}{4}r^3 - \frac{a^4}{4r^2} + \frac{1}{2}a^2\right)\cdot\sigma_0\cos\theta$$

であるので，応力分布は次式で表せる.

$$\sigma_r = \frac{1}{r}\cdot\frac{\partial\phi}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\cdot\frac{\partial^2\phi}{\partial\theta^2} = \frac{\sigma_0}{2}\left[1 - \frac{a^2}{r^2} + \left(1 + \frac{3a^4}{r^4} - \frac{4a^2}{r^2}\right)\cos 2\theta\right] \qquad ―――（1）$$

$$\sigma_\theta = \frac{\partial^2\phi}{\partial r^2} = \frac{\sigma_0}{2}\left[1 + \frac{a^2}{r^2} - \left(1 + \frac{3a^4}{r^4}\right)\cos 2\theta\right] \qquad ―――（2）$$

$$\tau_{r\theta} = -\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\cdot\frac{\partial\phi}{\partial\theta}\right) = -\frac{\sigma_0}{2}\left(1 - \frac{3a^4}{r^4} + \frac{2a^2}{r^2}\right)\sin 2\theta \qquad ―――（3）$$

これらの式より，円孔の縁の応力は，

$r = a$で，　$\sigma_r = 0$，$\tau_{r\theta} = 0$

$$\sigma_\theta = \sigma_0 - 2\sigma_0\cos 2\theta \qquad ―――（4）$$

σ_rと$\tau_{r\theta}$は境界条件で与えられているが，σ_θは式(4)よりθの関数であることが伺える.この式よりσ_θは，$\theta = \pm\pi/2$で最大値，$\theta = 0,\ \pi$で最小値を取り，

$$\sigma_{\theta\max} = 3\sigma_0 \qquad (\theta = \pm\pi/2)$$

$$\sigma_{\theta\min} = -\sigma_0 \qquad (\theta = 0,\ \pi)$$

である.したがって，ｘ方向に引張応力を作用させたとき，円孔のｙ方向の端が最大応力（引張応力）が掛かり，遠方の引張応力の３倍，すなわち応力集中係数$K_t = 3$である．また，最小応力は円孔のｘ方向の端に掛かり，遠方の引張応力と絶対値の等しい圧縮応力である.

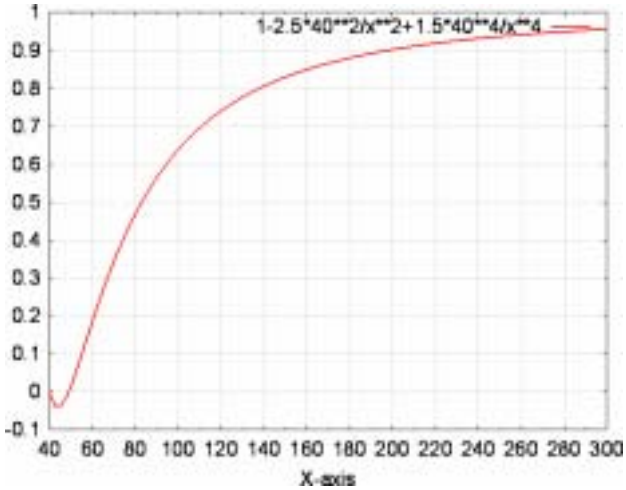
ｘ軸上のσ_rとσ_θおよび$\tau_{r\theta}$の分布は，式(1)～(3)にθ=0°を代入すると

$$\sigma_r = \sigma_0\left(1 - \frac{5}{2}\cdot\frac{a^2}{r^2} + \frac{3}{2}\cdot\frac{a^4}{r^4}\right) \qquad ―――（5）$$

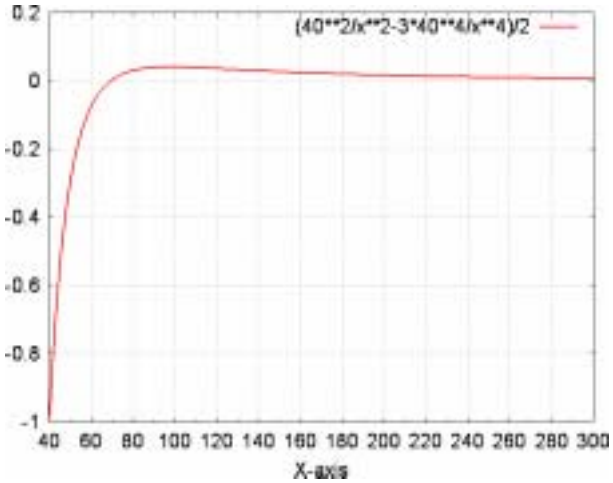
$$\sigma_\theta = \frac{\sigma_0}{2}\left(\frac{a^2}{r^2} - \frac{3a^4}{r^4}\right) \qquad ———(6)$$

$$\tau_{r\theta} = 0 \qquad ———(7)$$

式(5),(6)に a=40 を代入した分布を図６に示す.



(a)x 軸上・ｘ方向垂直応力（σ_r/σ_0）



(b)ｘ軸上・ｙ方向垂直応力（σ_θ/σ_0）

図６　ｘ軸上の応力分布

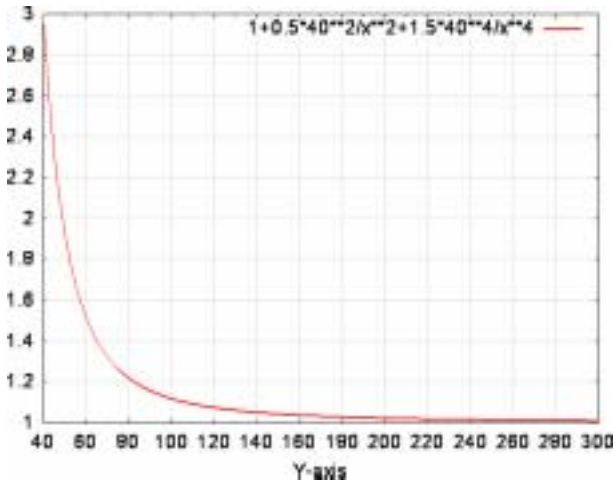
同様にして，ｙ軸上のσ_rとσ_θおよび$\tau_{r\theta}$の分布は，式(1)～(3)にθ=90°を代入して,

$$\sigma_r = \frac{3}{2}\sigma_0\left(\frac{a^2}{r^2} - \frac{a^4}{r^4}\right) \qquad ———(8)$$

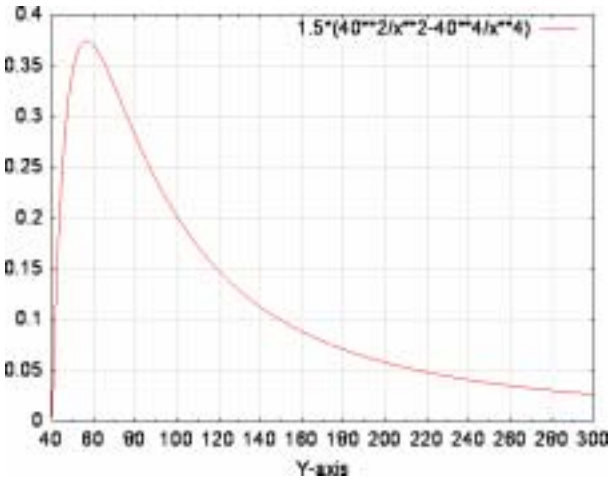
$$\sigma_\theta = \sigma_0\left(1 + \frac{1}{2}\cdot\frac{a^2}{r^2} + \frac{3}{2}\cdot\frac{a^4}{r^4}\right) \qquad ———(9)$$

$$\tau_{r\theta} = 0 \qquad ———(10)$$

式(8),(9)に a=40 を代入した分布を図７に示す.



(a)ｙ軸上・ｘ方向垂直応力（σ_θ/σ_0）



(b)ｙ軸上・ｙ方向応力分布（σ_r/σ_0）

図７　ｙ軸上の応力分布

４．２ 円孔を持つ有限幅板

前節では板が無限幅であると仮定したときの応力分布を示したが, 現実的には無限幅などは存在せず, さらに今回測定を行う板は, 円孔半径 a=40 に対して幅 W＝100, 長さ ℓ ＝200 である．このサイズでは図６および図７を見ても分かるように, 無限幅と近似するには少し長さが足りない．したがって，有限幅の板の応力集中問題として取扱う必要がある．

図８のように, 板幅２W の中央に半径 a の円孔があって, 板が x 方向に引張応力 σ_0 を受けるときの応力集中問題は Howland（1930）によって解かれており，その応力集中係数は図９となり，円孔周りの円周方向垂直応力 σ_θ の値は表１，および表１をグラフにした図 10 に示す．

ここで，応力集中係数 K_t の値は，板幅２W から円孔の径 2a を差し引いた部分が受け持つ平均の応力を基準としている．

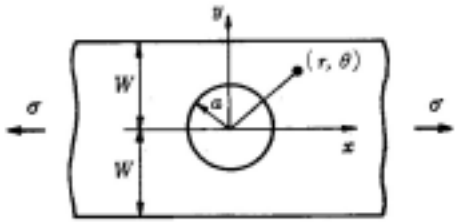


図８　有限幅板モデル

したがって，円孔縁の最大応力は,

$$\sigma_{\theta\max} = K_t \frac{W}{W-a}\sigma_0 \qquad (\theta = 90^\circ)$$

である．今回の解析モデルでは，W=100，a＝40，このとき図９より K_t＝2.22 とすると,

$$\sigma_{\theta\max} = K_t \frac{W}{W-a}\sigma_0 = 2.22 \times \frac{100}{100-40} = 3.70$$

である．

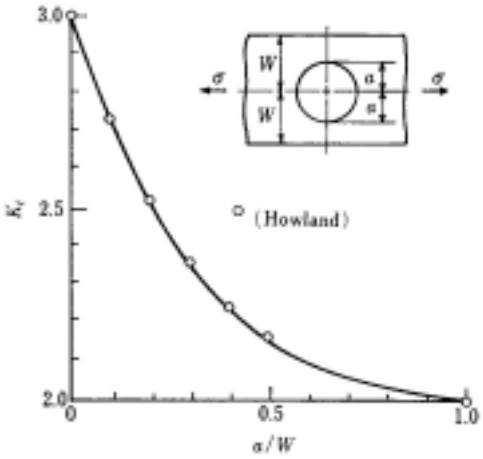


図９　応力集中係数

図 10　円孔縁の円周方向応力分布

表１　円孔縁の円周方向応力分布

θ°	a/b=0	a/b=0.1	a/b=0.2	a/b=0.3	a/b=0.4	a/b=0.5
0	-1.00	-1.03	-1.11	-1.26	-1.44	-1.58
15	-0.73	-0.74	-0.82	-0.95	-1.12	-1.32
30	0.00	-0.01	-0.06	-0.15	-0.30	-0.51
45	1.00	1.00	1.00	0.98	0.91	0.77
60	2.00	2.01	2.07	2.15	2.25	2.32
75	2.73	2.74	2.85	3.03	3.32	3.72
90	3.00	3.03	3.14	3.36	3.74	4.32

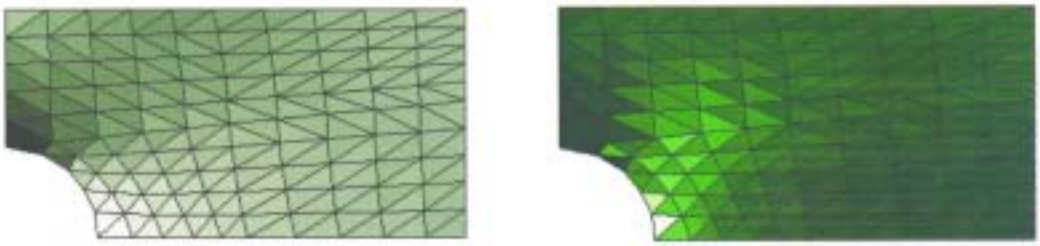
５．　実験結果と考察

５．１ 解析結果

今回の解析では，平板モデルを４ブロックに分け，１ブロックあたり５×５の四角形要素に分割している．したがって，モデル全体では 200 個の三角形要素に分割されることになる．

以下に，解析によって得られた応力分布図，変位図および誤差密度分布図を示し，考察を行う．

（1） 応力分布



(a)ｘ方向垂直応力分布図　　(b)ｙ方向垂直応力分布図

図 11　応力分布図

図 11 に解析結果より得た応力分布図を示す．

(a)　ｘ方向垂直応力分布

図(a)を見ると，円孔の上端部分の応力が最も高い応力の値を示し，円孔の右端部分が最も低い応力値となっている．具体的な値としては，図形の右端は作用させた応力と等しい 10MPa の応力である．また，４章より円孔の右端は応力がゼロ．円孔の上端は無限板で$\sigma_x = 3\sigma_0$，今回の解析モデルでは$\sigma_x \approx 3.7\sigma_0$である．

図６(a)をみると，ｘ軸上でｘ＝45～50 程度で引張応力が発生するため，応力最小値は正確には円孔縁ではないが，今回の解析ではメッシュの粗さなどもあり，分布図からその差を伺うことはできない．

(b)　ｙ方向垂直応力分布

図 11(b)がｙ方向垂直応力分布である．このグラフにおいても円孔の上端部分の応力が最も高い応力の値を示し，円孔の右端部分が最も低い応力値となっている．ただし，4.2 節の図６(b)および図７(b)を見ても分かるように，円孔右端部分の最小応力値は図６(b)より$\sigma_{y_{\min}} = -\sigma_0$，円孔の上端部分の最大応力値は図７(b)よりｘ＝50～60 で最大応力$\sigma_{y_{\max}} = 0.37\sigma_0$である．また，ｙ方向に対してｙ＝100 および（ｘ，ｙ）＝（0，40）の箇所では自由端であるためｙ方向垂直応力はゼロである．

したがって，ｙ方向垂直応力は大きな応力が働くのは円孔右端部分の圧縮応力くらいであり，全体的に応力はゼロの近い．

また，表２に円孔縁の各応力の値を示す．

表２は解析によって得られた要素への応力であり，角度は両端の節点の平均を用いている．表２の値からは，θ＝90°において図 11(a)のｘ方向に対する最大引張応力は 30.0MPa，θ＝0°においてｙ方向の圧縮荷重は 10.5MPa であり，4.2 節の表１の値とは一致せず，むしろ無限板の解に近い値が得られている．

ちなみに，表２においてσ_x，σ_y，τ_{xy}よりσ_θは座標変換公式より次式で求まる．

$$\sigma_\theta = \sigma_x \sin^2\theta + \sigma_y \cos^2\theta - 2\tau_{xy}\sin\theta\cos\theta$$

表2　円孔周りの接点における各応力

θ [deg]	σ_x [MPa]	σ_y [MPa]	τ_{xy} [MPa]	σ_θ [MPa]
8.13	0.020326	-10.679	0.256868	-10.53694
23.60	2.27677	-7.45188	-0.62159	-5.43625
39.07	7.67506	-1.17828	-3.53822	5.80058
56.72	17.8968	4.58974	-7.78815	21.03551
78.13	27.8143	4.74254	-7.78665	29.97325

（2） 変位

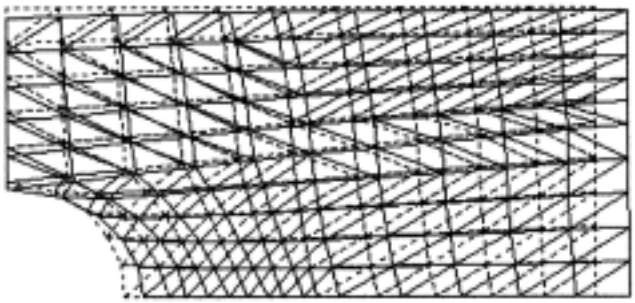


図 12　変位図

図 12 に変位図を示す.

基本的に, 今回の解析において弾性領域を仮定しているので, フックの法則が成り立つとすれば, ひずみは,

$$\varepsilon = E\sigma \qquad \text{（E；ヤング率）}$$

であるので, 応力の大きい部分がひずみが大きく, すなわち変位も大きい. 図 12 でｘ方向応力を作用させているのであるからｘ方向に変位するのは当然であるが, 特徴的なのはｙ軸上で負方向にひずみが発生していることである. これは, 弾性体が連続体であるためにｘ方向に正ひずみが生じた分, ｙ方向に負ひずみが発生したと考えられる.

（3） 誤差密度分布

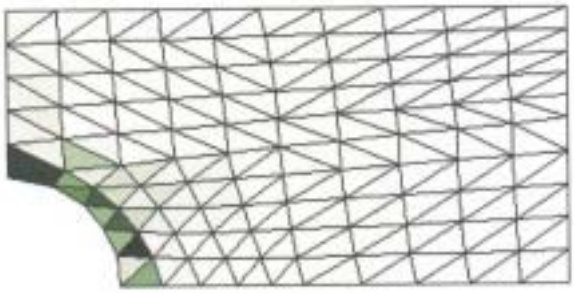


図 13　誤差密度分布

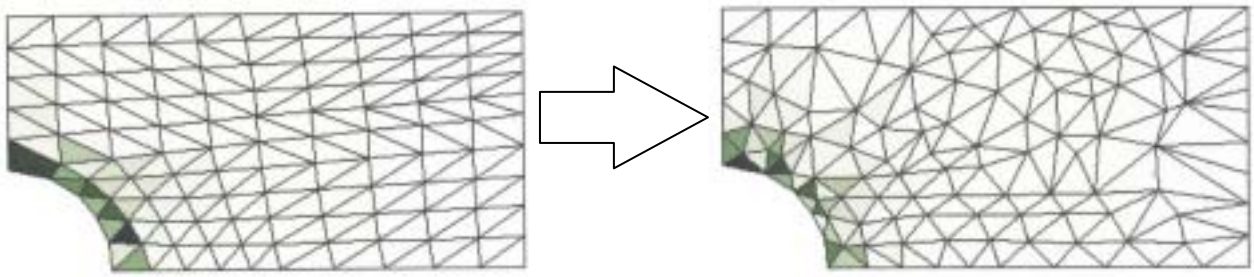
図 13 に誤差密度分布を示す.

図を見ても分かるように誤差は円孔周りで大きく, それ以外の部分は非常に小さくなっている. これは, この有限要素法においては応力値等の計算を要素ごとに行うが, 応力変化が大きい箇所で要素が大きいと, 応力の値の変化を十分に示すことができず真値から値が外れてしまうためである. 4.1 節の図６, 図７を見ても分かるように, 円孔縁周りでは応力の変化量が大きいため誤差も大きくなる.

５．２ 節点移動による誤差精度の変化

前節（３）のように，応力分布の変化が大きい箇所で要素が大きいと誤差が大きくなってしまう．今回用いた解析ソフトには，応力変化の大きい箇所の要素を自動的に小さく分割することにより，計算誤差を小さくするよう修正する機能が付いている．

図 14 に節点移動前後の誤差密度分布を示す．節点移動後の要素は円孔部分の要素は小さく，円孔から離れている要素は大きくなっていることが分かる．誤差密度分布は範囲が広くなっているように見えるが，表３の誤差の履歴を見ると，誤差の平均や標準偏差は実行回数２度目に大きくなっているが，それ以降は小さくなっている．



(a)節点移動前の誤差密度分布　　(b)節点移動後の誤差密度分布

図 14　節点移動による誤差密度分布の変化

表3　誤差履歴

実行回数	誤差の最大値	誤差密度の最大値	誤差の最小値	誤差の平均値	誤差の標準偏差
1	3.771023×10^{-2}	4.232129×10^{-4}	4.377972×10^{-7}	1.318397×10^{-3}	4.001772×10^{-3}
2	5.093499×10^{-2}	4.722367×10^{-4}	4.429969×10^{-7}	1.529472×10^{-3}	4.915957×10^{-3}
3	3.373957×10^{-2}	5.806105×10^{-4}	2.714530×10^{-7}	1.482965×10^{-3}	4.036836×10^{-3}
4	2.738193×10^{-2}	4.190254×10^{-4}	1.044183×10^{-7}	1.370952×10^{-3}	3.19039×10^{-3}
5	2.297073×10^{-2}	4.350056×10^{-4}	1.216751×10^{-7}	1.333181×10^{-3}	2.940414×10^{-3}
6	2.198901×10^{-2}	4.572661×10^{-4}	7.886268×10^{-7}	1.194658×10^{-3}	2.620751×10^{-3}

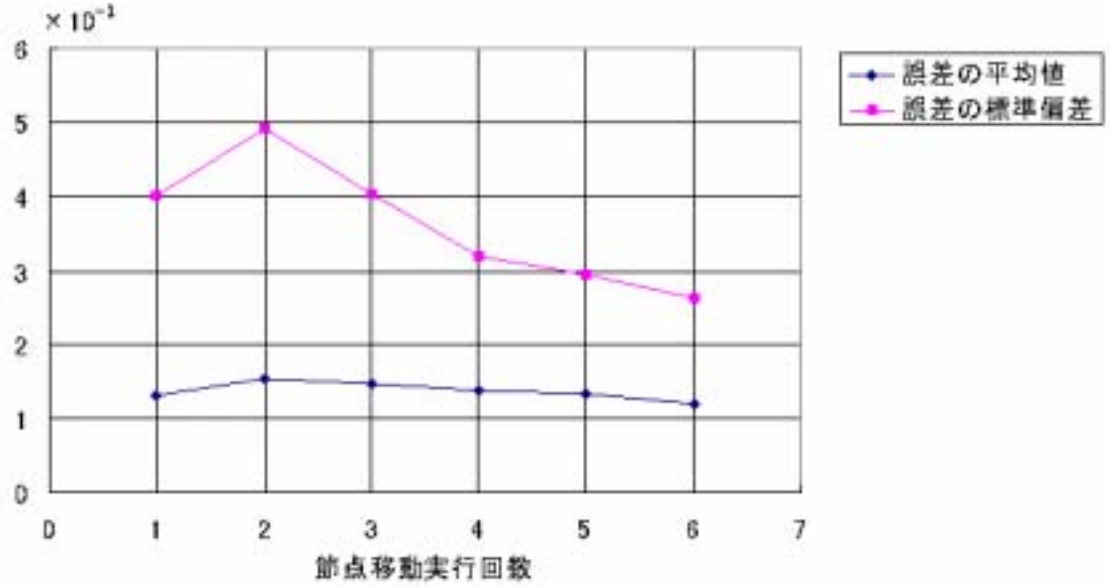


図15　誤差の平均および標準偏差と節点移動

５．３ 理論値と解析値

ここでは Howland によって解かれた，円孔のある有限幅板に引張応力を作用させた際の円孔縁円周方向応力 σ_θ の理論値と今回解析によって得られた円周方向応力 σ_θ の比較を行う．表２に節点移動前の円孔縁の応力を，表４に円孔縁の応力を示す．これらの σ_θ の値を極座標（σ_θ，θ）で表示したものが図 16 である．この図 16 には 4.2 節・図 10 にも示した有限幅板の円周方向応力（a/W＝0.4）も示してある．

この図 16 を考察すると，節点移動前と後では移動後の応力値が理論値に近づく傾向がうかがえる．理論値と解析値の比較をすると $\theta \leq 57°$ の範囲では理論値に相関しているが θ＝78°の値のみは大きく外れている．ただしこれは，図 14 の誤差密度を見ると円孔上端の要素は最も誤差が大きくなっているので，誤差の影響によるものが大きいと思われる．

また，Howland によって解かれた集中応力問題はｘ方向に無限の板であったが，今回の有限要素法解析ではもちろん有限である．P.6・図６の x 軸上の応力分布を見ると，$\ell = 200$ においてｙ方向垂直応力は $\sigma_\theta/\sigma_0 \approx 0$ に収束しているといえるが，ｘ方向垂直応力は $\sigma_r/\sigma_0 \approx 0.9$ であり，$\ell = 200$ では十分距離があるとはいえず，Howland の解とは理論解が異なることも十分考えられる．

表2 節点移動前の円孔周りの応力

θ [deg]	σx [MPa]	σy [MPa]	τxy [MPa]	σθ [MPa]
8.13	0.020326	-10.679	0.256868	-10.53694
23.60	2.27677	-7.45188	-0.62159	-5.43625
39.07	7.67506	-1.17828	-3.53822	5.80058
56.72	17.8968	4.58974	-7.78815	21.03551
78.13	27.8143	4.74254	-7.78665	29.97325

表4 節点移動後の円孔縁の応力

θ [deg]	σx [MPa]	σy [MPa]	τxy [MPa]	σθ [MPa]
8.13	1.25864	-11.5801	1.21412	-11.66328
23.60	0.671137	-5.69065	1.77349	-5.97218
39.07	6.29136	0.719178	-3.14301	6.00810
56.72	17.2042	3.5139	-7.03211	19.53388
78.13	31.7786	0.918367	-3.27686	31.79178

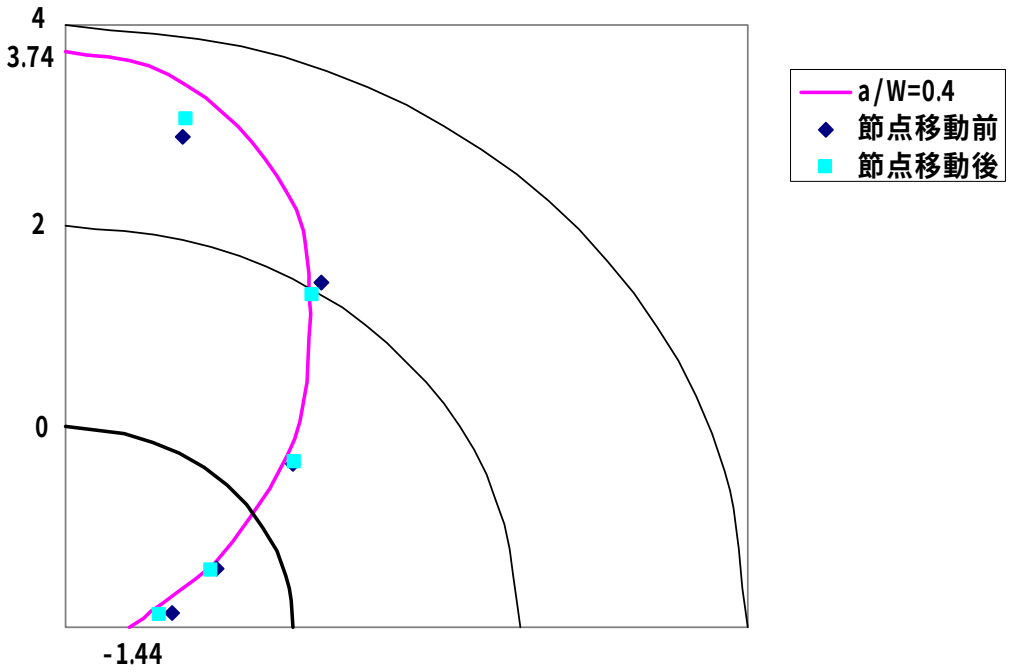


図16 円周方向応力分布（σθ/σ0）

５．４ 有限要素法における注意

p.3・3.2 節で述べた剛体変位が発生するかどうかは有限要素法の解析の際に最も注意すべき項目であるが，それ以外にも要素分割における注意事項がある．

5.2 節でも述べたように応力変化の大きい箇所が誤差も大きくなる．したがって，誤差を小さくするには要素を小さくすることで対処することができるが,解析モデル全体の要素を細かくしてしまったのでは，計算に時間が掛かり効率が悪い．したがって，材料力学や弾性力学の知識を生かしてあらかじめ応力変化の大きそうな箇所を予想できれば,その応力変化の大きい箇所のみ要素を細かくし，応力変化の小さい箇所，特に興味のない箇所の要素を大きくすることで誤差も小さく,かつ時間も比較的掛けずにシミュレーションを行うことができる．

６． 結論

弾性力学の理論どおり,円孔のある平板に引張応力を作用させると引張方向と垂直方向の円孔の端（縁）に最も強い応力が作用する．

無限平板では,

$$\sigma_{\max}/\sigma_0 = 3$$

引張りを作用させない方向の幅が有限,引張を作用させる方向の幅が無限である平板では,

$$\sigma_{\max}/\sigma_0 = 3.74 \qquad (a/W=0.4)$$

ｘ方向，ｙ方向が共に有限の場合は，シミュレーション値で

$$\sigma_{\max}/\sigma_0 = 3.12$$

であった．

有限要素法解析では応力変化の大きい箇所が最も誤差が大きくなり,その部分の要素を小さく分割するほど誤差も小さくなることも確認できた．

７． 感想

今回のレポートは通常の実験レポートとは異なり，解析ソフトの体験実習のようだった．特に，今年度の弾性力学の授業では「有限要素法」について取扱わなかったため，レポートに対するアプローチが難しい．しかしながら，有限要素法解析であるにもかかわらず，有限要素法の知識が全く無くとも解析が行えるところにシミュレーションの良さと怖さが伺える．

形状や初期条件・境界条件を入力するだけで解析を行なうことができるため，今まで計算できなかったような形状も簡単に応力解析が行うことができる．しかし，材料力学や弾性力学および破壊力学の知識に欠けていれば,求めたい形状がどのような応力状態でどのような結果が得られるかという感覚や勘が働かないので，計算に無駄に時間を掛けてしまったり，コンピュータの計算誤差が大きくなっても気付くことができない可能性もある．

解析ソフトが進歩したからといって，この科目に限らず，基礎知識および技術者としての勘を身につけることは，どの分野でも同じであるということが再確認できた．

≪参考文献≫

１）村上敬宜，弾性力学，養賢堂（2002）
２）西田正孝，応力集中，森北出版（1988）
３）宮本博，有限要素法と破壊力学（1973）
４）菊池文雄・岡部正之，有限要素システム入門（1986）